PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 15 — 1. August 1928 — Redaktionsschluß für Nr. 17 am 25. August 1928. — 29. Jahrgang

INHALT:

Zusammenfassende Berichte:

M. Wächtler, Über die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zum Studium der Spannungsverteilung in beanspruchten Körpern. S. 497.

Originalmitteilungen:

U. Retzow, Eisenhaltige Ringe geringer wirksamer Permeabilität. S. 534.

K. Hattori, Über eine formale Erweiterung der Relativitätstheorie und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Elektrizität. S. 538.

T. Asada, R. Ladenburg u. W. Tietze, Messung der Lebensdauer metastabiler *Hg*-Atome. S. 549.

Besprechungen:

L. Gay, Les mathématiques du chimiste. S. 551.

A. Schmid, Die Diffusionsgaselektrode. S. 551.

A. Eucken u. R. Suhrmann, Physikalisch-chemische Praktikumsaufgaben. S. 551.

P. Pascal, Synthèses et Catalyses Industrielles. Fabrications Minérales. S. 551.

W. Tafel, Wärme und Wärmewirtschaft der Kraft- und Feuerungs-Anlagen in der Industrie mit besonderer Berücksichtigung der Eisen-, Papier- und chemischen Industrie. S. 551.

L. de Broglie, Untersuchungen zur Quantentheorie. S. 552.

N. R. Campbell, Théorie quantiques des spectres. La relativité. S. 552.

J. Plassmann, Himmelsalmanach für das Schaltjahr 1928. S. 552.

Tagesereignisse. S. 552.

Personalien. S. 552.

Gesuche. S. 552.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Über die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zum Studium der Spannungsverteilung in beanspruchten Körpern.

Von M. Wächtler.

Inhaltsübersicht.

Über die Grunderscheinungen der akzidentellen Doppelbrechung isotroper Körper.

Über Beobachtungs- und Meßeinrichtungen.

Einiges über die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zur Homogenitätsprüfung durchsichtiger Materialien.

Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zur Ermittlung des Spannungszustandes in einem mechanisch beanspruchten Modellkörper.

1. Die Grundlagen des Verfahrens.
   a) Allgemeines.
   b) Über die Ähnlichkeit des Spannungszustandes im durchsichtigen Modell und im eigentlichen Konstruktionsteil.
   c) Über die Eigenschaften verschiedener Modellmaterialien.
   d) Über die Methoden zur völligen Bestimmung der Spannungen auf Grund der Messungen im polarisierten Licht.
2. Anwendungen auf einfache Belastungsfälle.
   a) Reine Normalbeanspruchung.
   b) Reine Scherung.
   c) Allgemeine ebene Biegung.
   d) Spezieller Biegungsfall nach F. Neumann.
   e) Biegung gekrümmter Stäbe.
   f) Kreisscheiben mit verschiedener Randbelastung.
   g) Radialbeanspruchte Kreisringe.
   h) Zugstäbe mit diskontinuierlichen Stellen im Innern (Kreisloch, elliptisches Loch, Risse).
   i) Diskontinuierliche Stellen an den Kanten (Einkerbungen, Ecken, — scharfe und abgerundete —).
3. Über ein spezielles technisches Beispiel (Spannungen in Zahnrädern).

Literaturverzeichnis.

Einleitung.

Um einen isotropen Körper doppelbrechend zu machen, kann man verschiedene Versuchsbedingungen anwenden. Am bekanntesten ist es, durch Einwirkung mechanischer Kräfte und durch Temperaturfelder optische Anisotropieeffekte zu erzielen. Es gibt aber auch viele Fälle, wo durch ein elektrisches oder magnetisches Feld Doppelbrechung erzeugt wird, und es ist auch gelungen, durch gerichtete optische Einwirkungen (Bestrahlung mit polarisiertem Licht) bestimmte Körper doppelbrechend zu machen (100).

Die Untersuchungen, die sich mit dem Studium dieser Fragen beschäftigen, sind so zahlreich, daß für diesen Bericht eine Beschränkung auf speziellere getroffen werden soll, und zwar befassen sich diese Ausführungen ausschließlich mit den Erscheinungen, die durch das Einwirken äußerer mechanischer Kräfte entstehen.

Über die elektrischen Erscheinungen ist u. a. in einem Sammelbericht von Szivessy im Jahrbuch d. Radioakt. u. Elektr. referiert

worden (92). Die Beschränkung auf die durch mechanische Einwirkung entstehenden Effekte wird noch weiter dadurch spezialisiert, daß hier nicht auf die Fragen der Entstehung der Doppelbrechungserscheinungen auf Grund von strukturtheoretischen Überlegungen eingegangen werden soll. Hierüber ist vom Verfasser bezüglich der Erscheinungen in Kolloiden in einem a. a. O. (98) erschienenen Artikel eine Übersicht zu geben versucht worden. Der Gegenstand dieser Arbeit erstreckt sich vielmehr auf die Anwendungsmöglichkeiten, die die akzidentelle Doppelbrechung zum Studium von Materialbeanspruchungen gefunden hat. Die Theorie der akzidentellen Doppelbrechung wird nur vom rein phänomenologischen Standpunkt aus im Anschluß an den von F. Neumann aufgestellten Ansatz erwähnt.

Die zahlreichen Arbeiten, die sich mit Untersuchungen des Spannungszustandes in doppelbrechenden Modellen beschäftigen, sind in den verschiedensten zum Teil schwer zugänglichen Zeitschriften zerstreut. Das ist sicher auch der Grund, daß auf diesem Gebiet öfter Arbeiten ausgeführt wurden ohne Kenntnis der bereits anderweitig vorhandenen Literatur. An bereits vorliegenden Sammelberichten sind zu nennen: eine Arbeit von H. Schultz, „Die Bestimmungen der Spannungen in beanspruchten Körpern mit Hilfe polarisierten Lichtes" (Betrieb (86)), eine von P. Heymans, „La Photo-Elasticimétrie . . . (Bulletin Belge (45)), eine Abhandlung von E. G. Coker, „Photo-Elasticity for Engineers" (Gen. el. Rev. (19)), eine von G. Delanghe, „La Photo-Elasticimétrie . . . (Génie civil (34)).

Mit Ausnahme des letzten sind alle diese Berichte 1920—21 erschienen. Seit dieser Zeit ist aber eine weitere Anzahl von Originalarbeiten veröffentlicht worden, so daß jetzt ein Bericht, der bestrebt ist, möglichst vollständig die bisherige Literatur zu berücksichtigen, berechtigt erscheint. Wenn auch eine möglichst allseitige Berücksichtigung der Literatur angestrebt war, so mußte doch eine Auswahl der wesentlichen Arbeiten getroffen werden, infolge des zu großen Materials. Die Gesichtspunkte, die für eine Beschränkung maßgebend waren, sind einmal vorwiegend die neuere Literatur zu behandeln und ferner bei den Anwendungen Untersuchungen von rein technischem Interesse von näheren Erörterungen auszuschließen.

Nach einer kurzen Beschreibung der prinzipiellen Erscheinungen folgt eine Übersicht über die Beobachtungsmethoden und die Meßtechnik. Bei den Anwendungen wurden die Homogenitätsstudien von Materialien nur kurz erwähnt, da dieser Gegenstand bekannter und auch schon, besonders bezüglich der Gläser, verschiedentlich behandelt worden ist (86, 65)[1]). In dem spezielleren Teil der eigentlichen quantitativen Spannungsmessungen wird einleitend die theoretische Voraussetzung für die Ähnlichkeit der Spannungsverteilung im optischen Modell und im Konstruktionsstück erörtert. Im engsten Zusammenhang damit wird dann die Eignung der verschiedenen für die optischen Modelle zur Verwendung kommenden Materialien behandelt. Diese Fragen sind gerade in neuerer Zeit wiederholt Gegenstand von Meinungsverschiedenheiten wenigstens bezüglich der Verwendung des Zelluloid geworden. Nach der Darstellung der verschiedenen Methoden, aus den optisch direkt zugänglichen Messungen, die zu jedem Punkt des Modelles gehörigen Werte der Hauptspannungen nach Größe und Richtung zu ermitteln, werden Anwendungsbeispiele behandelt. Hierbei ist eine Auswahl in dem oben erwähnten Sinne getroffen, so daß vorwiegend einfache Belastungsfälle, die meist auch einer elastizitätstheoretischen Behandlung zugänglich sind, von allgemein physikalischem Interesse berücksichtigt wurden.

Über die Grunderscheinungen der akzidentellen Doppelbrechung isotroper Körper.

Wird ein Körper aus einem isotropen durchsichtigen Material, z. B. ein Würfel aus gut gekühltem Glas einem allseitig gleichmäßigen Druck ausgesetzt, indem er etwa in eine Flüssigkeit, die unter Druck gesetzt werden kann, gebracht wird, so ändert er sein Verhalten gegenüber einem hindurchgeschickten Lichtstrahl, abgesehen von einer geringen gleichmäßigen Änderung des Brechungsexponenten nicht. Er bleibt also isotrop, d. h. sein physikalisches, speziell sein optisches Verhalten ist für jeden Punkt in jeder Richtung das gleiche. Wird aber eine Beanspruchung auf den Würfel ausgeübt, die nicht allseitig gleichmäßig ist, sondern z. B. in einem auf zwei gegenüberliegenden Würfelflächen gleichförmig angreifenden Zug oder Druck besteht, so zeigt der Körper jetzt gegenüber einem durchgehenden Lichtstrahl der nicht mit der Kraftrichtung parallel ist, ein anderes Verhalten als im unbeanspruchten Material. Er verhält sich jetzt wie ein Kristall, und zwar bei der speziellen einfachen Beanspruchungsart wie ein optisch-einachsiger, dessen optische Achse mit der Kraftrichtung zusammenfällt.

Wenn man in einem beliebigen Punkte eines isotropen Körpers auf jedem Radiusvektor den zugehörigen Wert des Brechungsexponenten für die betreffende Richtung durch eine dem

1) Weitere Literatur hierüber siehe bei Drude u. Werthauer (33).

Brechungsexponenten proportionale Strecke markiert, so ergeben die Endpunkte sämtlicher Radiovektoren eines Punktes den Ort einer Kugeloberfläche. Bei einem gleichförmig in einer Richtung beanspruchten Körper ergibt sich als charakteristische Fläche ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse in die Beanspruchungsrichtung fällt. Bei einer Beanspruchung durch Zug ist es ein ausgezogenes, bei Beanspruchung durch Druck ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Diese charakteristische Fläche wird nach Fletcher (41) Indexellipsoid oder optische Indikatrix genannt. Wie Fletcher gezeigt hat, lassen sich aus der Kenntnis des Indexellipsoids alle charakteristischen Eigenschaften der optisch anisotropen Körper herleiten[1]). Als wesentlichste ergibt sich die bekannte Tatsache, daß ein gewöhnlicher Lichtstrahl, wenn er nicht in der Achse der Indikatrix verläuft, im allgemeinen in zwei Strahlen polarisierten Lichtes, deren Polarisationsebenen senkrecht aufeinanderstehen, zerlegt wird. Diese beiden Strahlen, von denen der eine (ordentliche Strahl), das Snelliussche Brechungsgesetz wie in isotropen Medien befolgt, während der andere (außerordentliche Strahl) es nicht befolgt, pflanzen sich mit verschiedener Geschwindigkeit in dem Körper fort. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in isotropen Körpern mit akzidenteller Doppelbrechung hat F. Neumann, der sowohl theoretisch wie auch experimentell die Erscheinungen eingehend untersucht hat, Beziehungen aufgestellt (75). Er erhält für den allgemeinsten Fall einer räumlichen Deformation für die Hauptlichtgeschwindigkeiten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 + q\xi + p\eta + p\zeta \\ v_y &= v_0 + p\xi + q\eta + p\zeta \\ v_z &= v_0 + p\xi + p\eta + q\zeta. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet v_x, v_y, v_z, die Komponenten der Hauptlichtgeschwindigkeit nach den drei Koordinatenachsen; ξ, η, ζ, die Hauptdilatationen, v_0 die Lichtgeschwindigkeit im nichtdeformierten Körper; p und q sind Materialkonstanten, die noch von der Wellenlänge abhängen. Die Voraussetzung dieser Theorie sind die Annahmen, daß in einem gleichförmig gedehnten unkristallinischen Körper für die Lichtfortpflanzung die Fresnelschen Gesetze gelten, daß die Polarisationsachsen in die Richtung der Hauptdilatationsachsen fallen, und daß die Hauptlichtgeschwindigkeiten v_x, v_y, v_z, lineare Funktionen der Dehnung sind. Diese Annahmen sind wahrscheinlich und auch durch die bisherige Erfahrung bestätigt (vgl. Pockels 76, Lehrb. S. 460).

1) Vgl. Ambronn-Frey (5) S. 11 u. f.

Nach dem obigen Ansatz hängt das Vorzeichen der Doppelbrechung von der Größe $p - q$ ab. Ist dieselbe positiv, so ergibt sich das Vorzeichen der Doppelbrechung positiv in bezug auf die Dehnungsrichtung, ist $p - q$ dagegen für ein Material negativ, so bedeutet das, daß dasselbe durch Dehnung negativ doppelbrechend in bezug auf die Dehnungsachse wird, also ein Verhalten wie ein negativ einachsiger Kristall zeigt. Die Untersuchungen von Pockels (76) an Gläsern ergaben, daß der Wert von $p - q$ im allgemeinen positiv ist, mit zunehmendem Bleigehalt des Glases aber abnimmt und bei schwersten Flintgläsern negativ ist[1]). Er konnte auch ein Glas von bestimmtem Bleigehalt herstellen für das $p - q = 0$, daß also keine Doppelbrechung bei elastischer Deformation zeigte. Infolge der großen Dispersion der Doppelbrechung ist dieser Fall aber jeweils immer nur für eine Wellenlänge zu erreichen. Nach den bisher vorliegenden Beobachtungen ist schweres Flintglas der einzige isotrope Körper, der bei Dehnung negativ doppelbrechend wird (die an verschiedenen Kolloiden gefundenen, ähnlichen Erscheinungen lassen sich auf das Vorhandensein kristalliner Bausteine zurückführen). Was der eigentlich physikalische Grund dieses merkwürdigen Verhaltens von schwerem Flintglas ist, ist noch nicht geklärt. Die Neumannsche Theorie kann hierüber natürlich keinen Aufschluß geben, da sie ja nicht auf den inneren Mechanismus des Zustandekommens der Anisotropie eingeht.

Zur Bestimmung der beiden Größen p und q hat König (62) einfache Ausdrücke abgeleitet. Man kann jede elastische Deformation auf ihre beiden Grundformen Dilatation und Schiebung zurückführen. Die optischen Einflüsse, die diesen Grundbeanspruchungsarten zugeordnet sind, sind charakterisiert, durch die Größe der Doppelbrechung G_0, die infolge der Dilatation entsteht, bezogen auf die Dilatation und durch die Doppelbrechung infolge der Schiebung, bezogen auf die Größe der Schiebung. Diese beiden Größen G_0 und K_0 lassen sich leicht experimentell bestimmen und stehen mit p und q in folgenden Beziehungen:

$$K_0 = -\frac{1}{3}(2p + q)N; \quad G_0 = \frac{N^2}{v_0}(p - q),$$

wobei N den Brechungsexponenten des undeformierten Materials bedeutet.

Da die akzidentelle Doppelbrechung isotroper Körper im allgemeinen nicht so groß ist, daß die beiden Strahlen so stark gebrochen

1) Über die Messungen früherer Beobachter vgl. Pockels, Lehrbuch (76) S. 462.

werden, daß eine getrennte Beobachtung und Bestimmung der einzelnen Brechungsexponenten möglich ist, so bestimmt man die Differenz der Brechungsexponenten aus Interferenzbeobachtungen der beiden Strahlen im polarisierten Licht. Wird ein doppelbrechender Körper von einem parallelen Strahlenbündel gradlinig polarisierten Lichts durchsetzt, so erhalten die beiden in dem Körper entstehenden Strahlen infolge ihrer verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gegeneinander eine Phasendifferenz, die man bestimmen kann, wenn man die Lichtstrahlen durch einen zweiten Polarisator treten läßt. Praktisch wählt man die Beobachtungsbedingungen so, daß die beiden Polarisatoren, zwischen denen der doppelbrechende Körper sich befindet, mit ihren Polarisationsebenen aufeinander senkrecht stehen, daß also das Gesichtsfeld ohne doppelbrechendes Objekt dunkel erscheint. Die Aufhellung, die ein anisotroper Körper hervorbringt, ist abgesehen von der Stärke der Doppelbrechung abhängig von der Richtung, die die Beanspruchungsrichtungen mit den Polarisationsebenen bilden. Für den einfachen Fall eines gleichförmig in einer Richtung gezogenen Glasstreifens erhält man leicht eine Übersicht. Es zeigt sich, daß der Streifen bei konstant gehaltener Spannung maximale Aufhellung zeigt, wenn die Dehnungsrichtung unter 45^0 zu den Polarisationsebenen orientiert ist. In dieser Lage, die man als Diagonalstellung bezeichnet, nimmt man im allgemeinen die Beobachtung und Messung der Doppelbrechung vor. Zwischen der Differenz der Brechungsexponenten des außerordentlichen n_a und des ordentlichen Strahls n_0, die als Maß der Stärke der Doppelbrechung dient und der in dem doppelbrechenden Körper entstehenden Gangdifferenz der beiden Strahlen besteht folgende einfache Beziehung:

$$n_a - n_0 = \frac{\gamma \lambda}{d},$$

wobei d die Dicke der doppelbrechenden Schicht, γ die Gangdifferenz in Wellenlängen, λ die Wellenlänge der Beobachtungslichtsorte ist. Diese Gleichung ist die Grundlage für die Meßmethode der Stärke der Doppelbrechung mit Hilfe von Interferenzbeobachtungen. Um nun für einen isotropen Körper eine charakteristische Größe für die akzidentelle Doppelbrechung zu haben, bezieht man die Größe $n_a - n_0$ auf die relative Verlängerung und bezeichnet sie (vgl. 60, S. 19) als spezifische Doppelbrechung G. Statt auf die relative Verlängerung kann man die Stärke der Doppelbrechung auch auf die Spannung pro Flächeneinheit beziehen, um ebenfalls eine „spezifische Doppelbrechung“ G_p zu erhalten. Zwischen G und G_p gilt die einfache Beziehung $G = G_p E$, wobei E den Elastizitätsmodul bedeutet.

Als Dispersion der Doppelbrechung bezeichnet man (5, S. 50) das Verhältnis der Stärke der Doppelbrechung für kurzwelliges Licht zu der für langwelliges, z. B.

$$\frac{(n_a - n_0)_{436\,\mu\mu}}{(n_a - n_0)_{650\,\mu\mu}}.$$

Dieser Wert ist für Körper mit normaler Dispersion der Doppelbrechung z. B. für gewöhnliches Kronglas etwa gleich 1. (Siehe auch Köhler (50) und Reeb (79).)

Über Beobachtungs- und Meßeinrichtungen.

Die Versuchsanordnungen, die man zur Beobachtung der Doppelbrechungserscheinung deformierter Körper anwendet, sind sehr einfach. Fig. 1 gibt die von Hönigsberg (52) benutzte Apparatur wieder. Das Licht einer Bogen-

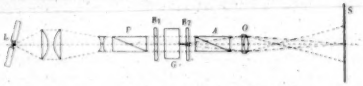


Fig. 1. Nach Hönigsberg (52).

lampe L, das durch einen Kondensor und eine Zwischenlinse praktisch parallel gemacht ist, durchsetzt so das Nicolsche Prisma P, den Polarisator, dann den Versuchskörper G und gelangt durch den zweiten Nicol A, den Analysator, dessen Polarisationsebene senkrecht zu der des Polarisators steht, zum Objektiv O, mit dessen Hilfe die Erscheinungen entweder auf den Schirm S projiziert oder photographisch registriert werden können. Will man eine quantitative Auswertung der Erscheinungen, so beobachtet man im allgemeinen subjektiv durch O.

Der Vorteil dieser Anordnung besteht darin, daß die parallelen Strahlen unmittelbar zwischen den Nicols verlaufen, so daß die Doppelbrechungserscheinungen des Versuchskörpers rein beobachtet werden können und nicht durch Apparatureinflüsse gestört werden. Anderseits ist aber dabei das Gesichtsfeld durch die Öffnung der Nicols begrenzt. Wenn man also zu größeren Gesichtsfeldern übergehen will, so ist die Verwendung sehr großer und damit kostspieliger Nicols notwendig, was einen Nachteil dieser Versuchsanordnung bedeutet.

Man kann aber bei Verwendung von Nicols mit kleiner Öffnung größere Versuchskörper untersuchen, wenn man die in Fig. 2 dargestellte Versuchsanordnung wählt.

Hierbei ist ein großes Gesichtsfeld zu erzielen. Es befinden sich aber jetzt zwischen den

Nicols außer dem Versuchskörper noch zwei Sammellinsen L und O_1. Damit durch diese keine wesentlichen Störungen im Beobachtungsfeld entstehen, müssen sie sehr sorgfältig ausgewählt sein, sowohl hinsichtlich ihres Materials als auch in bezug auf eine spannungsfreie Fassung.

Für die Beobachtung sehr großer Modelle hat Coker und Thompson (29) ein Polariskop

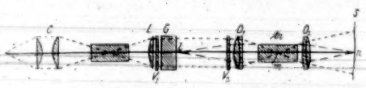


Fig. 2. Nach Schultz (86).

konstruiert, das keine Nicols verwendet (Fig. 3). Als Lichtquelle dient eine durch mehrere Metallfadenlampen F erhellte Mattglasscheibe M. Der Polarisator P besteht aus einem Spiegel aus schwarzem Glas. Als Analysator wird ein Glasplattensatz G verwandt. Die beiden Glimmerplättchen V_1 und V_2 (auf deren Bedeutung

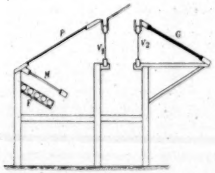


Fig. 3. Nach Coker u. Thompson (29).

weiter unten eingegangen wird), begrenzen das Gesichtsfeld und haben eine Fläche von je $25 \cdot 10^2$ cm^2. Eine spezielle Versuchsanordnung zur Prüfung optischer Gläser ist auch von Schultz (86) angegeben worden.

Die quantitative optische Auswertung eines beanspruchten Körpers besteht in der Ermittlung der Lage mechanisch neutraler Zonen, sowie in der Feststellung der Stärke der Doppelbrechung und ihrer Achsenrichtung in jedem Punkte.

Um die Achsenrichtung der Doppelbrechung, die mit der Richtung der Hauptspannungsrichtungen zusammenfällt, zu bestimmen, gibt es zwei Möglichkeiten. Die eine besteht darin, daß man das Gesichtsfeld mit Hilfe einer feinen Blende von Punkt zu Punkt untersucht und zu jedem Punkt durch Drehen des Objektes oder beider Nicols gleichzeitig die maximale Aufhellung, das ist die Diagonalstellung jeder Stelle des Objektes, bestimmt (siehe z. B. Steinheil, Rieth). Die andere Möglichkeit besteht in der Aufzeichnung derjenigen Stellen, die die gleiche Achsenrichtung für eine beliebige Winkelstellung des Objektes zu den gekreuzten Nicols haben. Diese Punkte werden durch Aufzeichnen der „Isoklinen", das sind diejenigen schwarzen Linien, die zwischen gekreuzten Nicols bei Drehung des Objektes ihre Lage ändern, weil sie denjenigen Stellen entsprechen, deren Achsenrichtung parallel zu den Polarisationsrichtungen sind und die deshalb dunkel bleiben. Dreht man somit die beiden Nicols in gekreuzter Stellung einmal um 360° und zeichnet zu jeder Winkelstellung die jeweilige Lage der beweglichen schwarzen Linien auf, so hat man damit sämtliche Linien gleicher Achsenrichtung erfaßt, aus denen man dann wie weiter unten noch gezeigt wird, für jeden Punkt die Hauptspannungsrichtung bestimmt.

Will man die Lage optisch neutraler Zonen, also solcher Stellen, für die keine Gangdifferenz und somit keine Doppelbrechung besteht, ermitteln, so muß man eine Überlagerung der „Isoklinen" dadurch ausschalten, daß man das Objekt bzw. beide Nicols gleichzeitig einmal um die optische Achse dreht, wobei die wirklichen neutralen Stellen dadurch leicht von den „Isoklinen" zu unterscheiden sind, daß sie im Gegensatz zu letzteren bei jeder Winkelstellung die gleiche Lage haben. Da dieses Verfahren zur Trennung umständlich ist, und es ferner in manchen Fällen erwünscht ist, unmittelbar durch eine Beobachtung im Gesichtsfeld sich über die Lage der neutralen Zonen zu orientieren, kann man sich dazu einer besonderen Versuchsanordnung bedienen. Das eine Verfahren, mit dessen Hilfe man die unmittelbare Sichtbarmachung der neutralen Zonen erreicht, ist von Siedentopf angegeben (88) und besteht darin, die beiden Nicols in gekreuzter Stellung sehr rasch völlig synchron rotieren zu lassen. Man erreicht dadurch, wenn die Rotationsgeschwindigkeit groß genug ist, daß die wandernden Isoklinen eine so schwache Intensität erhalten, daß sie nicht mehr wahrgenommen werden können. Praktisch wendet man dieses Verfahren nicht mehr an, da der Rotationsmechanismus, wenn er zuverlässig arbeiten soll, schwierig herzustellen ist. Man kann aber mit einem statischen Verfahren denselben Zweck leicht erreichen. Die Methode stammt bereits von Maxwell und ist unseres Wissens für optische Modelluntersuchungen zuerst von Hönigsberg (54) angewandt worden. Man beobachtet dabei nicht mehr in geradlinig polarisiertem Licht, sondern in zirkularpolarisiertem Licht. Das erreicht man dadurch, daß man in den Strahlengang zwischen Polarisator und Versuchskörper ein Glimmerplättchen von $^1/_4$ Wellenlänge Phasendifferenz einschaltet und zwischen Versuchskörper und

Analysator ein ebensolches dessen Achsen zum ersten senkrecht stehen und die beide in der Diagonalstellung orientiert sind. In Fig. 1—3 sind diese Glimmerplättchen in der Apparatur eingezeichnet. Diese Beobachtung im zirkularpolarisierten Licht ist für die Orientierung über die Lage von Nullzonen recht zweckmäßig, sie stößt aber praktisch auch auf gewisse Schwierigkeiten, da zwei exakt gleiche Glimmerplättchen mit $^1/_4$ Gangdifferenz für eine bestimmte Wellenlänge nicht immer leicht zu beschaffen sind und die Methode streng auch nur für monochromatisches Licht gilt. Für quantitative Auswertung wird daher im allgemeinen mit geradlinig polarisiertem Licht gearbeitet.

Zur Bestimmung der Stärke der Doppelbrechung und ihres Vorzeichens verwendet man einen Kompensator, d. i. ein doppelbrechender Körper, dessen Doppelbrechung nach Größe und Vorzeichen bekannt ist und als Vergleichsgröße für die zu messende Doppelbrechung dient. Für exakte Messungen ist die Verwendung von monochromatischem Licht erforderlich; für viele Fälle ist aber die Beobachtung im weißen Licht ausreichend, außerdem hat man dabei den Vorteil, soweit es sich um farblose Objekte mit annähernd normaler Dispersion handelt, aus den auftretenden Interferenzfarben die „Ordnung der Gangdifferenz" zu bestimmen. Bekanntlich zeigt doch ein doppelbrechender Körper zwischen gekreuzten Nicols im monochromatischen Licht außer an den bereits erwähnten Stellen, den „Isoklinen" und den neutralen Zonen, auch noch da Isotropie, wo die Gangdifferenz der beiden Strahlen ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge des Beobachtungslichtes ist. Es bleibt somit zunächst die Gangdifferenz bis auf ein Vielfaches der Wellenlänge unbestimmt. Bei Anwendung von weißem Licht dagegen ist eine Verwechselung der neutralen Zonen mit den Stellen für die eine Gangdifferenz von einem ganzen Vielfachen einer Wellenlänge vorliegt im allgemeinen nicht möglich, da letztere jetzt nicht schwarz, sondern in den den einzelnen Ordnungen entsprechenden Interferenzfarben erscheinen.

Um mit einem Kompensator die verschiedensten Werte der Gangdifferenzen des zu messenden Körpers bequem „kompensieren" zu können, stellt man ihn meist als Keil mit geringem Keilwinkel aus einem Kristall her. Ein sehr einfacher und bequem zu handhabender derartiger Kompensator ist der Quarzkeilkompensator nach Siedentopf (89). Er besteht im wesentlichen aus einem Quarzkeil, der so aus einem Kristall geschnitten ist, daß dessen optische Achse parallel zur Grundfläche verläuft und senkrecht auf der Keilkante steht. Ein solcher Keil zeigt bekanntlich in der Diagonalstellung zwischen gekreuzten Nicols im monochromatischen Licht ein System von geradlinigen schwarzen Interferenzstreifen, die parallel zur Keilkante verlaufen. Von diesen entspricht der der Keilkante am nächsten liegende einer Gangdifferenz von einer Wellenlänge, während für jeden folgenden die Gangdifferenz um eine weitere Wellenlänge wächst. Im weißen Licht entsteht an Stelle schwarzer Streifen ein System von Interferenzfarben, durch die die verschiedenen „Ordnungen" der Gangdifferenz zu unterscheiden sind. Der Keil ist als Kompensator mit einer Skala versehen, die unmittelbar den Wert $\gamma\lambda$ in μ angibt.

Um nun eine unbekannte Gangdifferenz zu bestimmen, überlagert man dem doppelbrechenden Objekt diejenige Stelle des Quarzkeils, deren Gangdifferenz die zu bestimmende gerade aufhebt, so daß man auf dem Kompensator dann direkt das gesuchte $\gamma\lambda$ ablesen kann. Je nach dem Vorzeichen der unbekannten Doppelbrechung im Vergleich zu der des Quarzes muß man, um die Kompensation erreichen zu können, den Keil entweder in der „Additionslage" (bei entgegengesetztem Vorzeichen) oder in der Subtraktionslage (bei gleichem Vorzeichen) überlagern. Im weißen Licht ist die Kompensation sehr bequem, da hierbei die kompensierende Stelle des Keils schwarz erscheint. Im monochromatischen Licht dagegen muß man aus der Verschiebung der Kompensatorstreifen die gesuchte Gangdifferenz ermitteln, wobei diese zunächst nur bis auf ganze Vielfache der Wellenlänge zu bestimmen ist. Zur völligen Bestimmung muß man sich entweder durch Orientierung im weißen Licht einen Anhaltspunkt über die Ordnung der Gangdifferenz verschaffen (wofür aber das Vorhandensein annähernd normaler Dispersion der Doppelbrechung Voraussetzung ist), oder man muß die Entstehung der Gangdifferenz zeitlich mit zunehmender Belastung verfolgen. In manchen Fällen kann man auch durch keilförmiges Anschneiden des zu messenden Körpers sehr bequem die Ordnung der Gangdifferenz ermitteln.

Die Genauigkeit mit der man $\gamma\lambda$ mit dem Quarzkeilkompensator bestimmen kann, ist für eine mittlere Gangdifferenz von etwa $0{,}50\,\mu$ durch einen Fehler von 1—2 Pröz. begrenzt.

Für genauere Messungen ist der Babinetsche Kompensator sehr geeignet. Er besteht aus zwei Quarzkeilen mit gleichen Keilwinkeln, die übereinandergeschoben werden, so daß eine planparallele Platte veränderlicher Dicke entsteht. Die beiden Keile sind so aus dem Quarz geschnitten, daß bei einem die optische Achse des Quarzes der Keilkante parallel, beim andern senkrecht zu derselben verläuft. Im weißen Licht

erscheinen also parallel zur Nullinie auf jeder Seite dieselben Interferenzstreifen, beide Seiten besitzen aber entgegengesetztes Vorzeichen. Wird ein solcher Kompensator mit einem doppelbrechenden Objekt überlagert, so erkennt man zunächst aus der Verschiebungsrichtung des Nullstreifens das Vorzeichen der Doppelbrechung. Die Gangdifferenz wird nun in der Weise gemessen, daß der verschobene Nullstreifen wieder in seine Ausgangslage gebracht wird, indem man mittels einer Mikrometerschraube, die beiden Keile gegeneinander verschiebt. Die dazu nötige Drehung der Mikrometerschraube, die mit einer in Wellenlängen geeichten Trommelablesung verbunden ist, gestattet dann die Ermittlung der gesuchten Gangdifferenz.

Neben den genannten gibt es noch eine ganze Anzahl anderer Kristallkompensatoren, die zum Teil auf ganz anderen Prinzipien beruhen, von deren Beschreibung aber hier abgesehen werden soll. (Siehe z. B. Ambronn-Frey (5) und Drude und Werthauer (33).)

In manchen Fällen, wo es sich vorwiegend um eine Orientierung über den Doppelbrechungsverlauf und nicht um genaue quantitative Bestimmungen handelt, benutzt man als Kompensator nicht einen doppelbrechenden Körper mit kontinuierlich veränderlicher Gangdifferenz in Form eines Keils, sondern man verwendet eine Anzahl verschieden dicker Gips- oder Glimmerplättchen. Diese sind in ihrer Dicke z. B. so abgestuft, daß man Gangdifferenzen von 1 Achtel Wellenlänge noch abgleichen kann.

Für die speziellen Zwecke der optischen Spannungsmessung wird gelegentlich auch zur Kompensation an Stelle eines Kristallkompensators ein isotroper Körper, dem man durch Zug oder Druck akzidentelle Doppelbrechung erteilt, verwandt. Es ist naheliegend, einen solchen Kompensator aus dem gleichen Material herzustellen, aus dem man gerade das Modell angefertigt hat. So kann man z. B. in einer entsprechenden Dehnungsvorrichtung einen schmalen Glasstab einspannen, der durch Drehen einer Schraube, deren Umdrehungen direkt in kg/mm² geeicht sind, über einen bestimmten Längenbereich gleichmäßig doppelbrechend wird. Diesen Kompensator bringt man je nach dem Vorzeichen der zu messenden Doppelbrechung in Additions- oder Subtraktionslage über dem Objekt an und erzeugt durch Drehen der Schraube eine so starke Gangdifferenz, daß Isotropie resultiert. Durch Ablesen der Kompensatorspannung läßt sich dann sofort der Spannungsbetrag an der unbekannten Stelle anzeigen. Diese Art eines Kompensators ist meines Wissens zuerst von Coker (20) angegeben worden. Da nun häufig Modelle aus Zelluloid verwandt werden, so benutzt man dabei auch als Kompensator einen gedehnten Zelluloidstreifen. Wie weiter unten noch näher gezeigt wird, können aber gegen die Verwendung von Zelluloid zu Modellen unter Umständen gewisse Bedenken auftreten, diese würden sich dann sinngemäß auch auf die Verwendung dieses Materials zu Kompensatoren beziehen.

Die Genauigkeit bei den optischen Spannungsmessungen wird durch die bei der Bestimmung der Stärke der Doppelbrechung und bei der Ermittlung der Achsenrichtungen erreichbare festgelegt. Die Messung der Gangunterschiede ist eine völlige Präzisionsmessung bei der der Fehler leicht auf einige Promille begrenzt werden könnte. Die in manchen Fällen nötige Messung der Dicke oder Dickenänderung ist auch mit einer solchen Genauigkeit möglich, so daß dadurch die Fehlergrenze nicht verschlechtert wird. Die Bestimmung der Achsenrichtung, die meist aus der Aufnahme der Isoklinen erfolgt, ist wesentlich ungenauer, da diese Linien immer eine gewisse Breite besitzen. Eine weitere Beeinträchtigung der Genauigkeit kommt dadurch zustande, daß die Materialien, die zu den Modellen verwandt werden, oft eine geringe Anisotropie von der Herstellung her besitzen, die im allgemeinen nicht zu eliminieren ist. Es wird somit insgesamt mit einem Fehler von einigen Prozent im Durchschnitt zu rechnen sein, was aber für die meisten Fälle durchaus ausreichend ist.

Einiges über die Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zur Homogenitätsprüfung durchsichtiger Materialien.

Von der Kenntnis der Erscheinungen der akzidentellen Doppelbrechung wird praktisch bei Prüfung von Gläsern Gebrauch gemacht. Von einem Glas, das für optische Instrumente verwandt werden soll, verlangt man neben einer schlierenfreien Beschaffenheit, daß es möglichst frei von inneren Spannungen ist. Es ist bekannt, daß fast jedes Glas, wenn es nicht unter ganz besonderen Bedingungen gekühlt worden ist, doppelbrechend ist. Die Erscheinungen sind prinzipiell die gleichen wie sie ein Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte zeigt. Der Grund für die Doppelbrechung in Gläsern beim Fehlen äußerer Kräfte ist in inneren Spannungen zu suchen, die sich beim Erstarren der Schmelze ausbilden, da im allgemeinen dieser Prozeß nicht für jede Stelle der Masse gleichmäßig erfolgt.

Diese Doppelbrechungserscheinungen sind bereits von Seebeck (87) beobachtet und von Brewster (18)[1]) näher studiert und in ihrer

1) Über weitere Arbeiten der älteren Literatur, insbesondere von Brewster siehe auch das Literaturverzeichnis von Heymans (45) S. 129.

Ursache erkannt worden. Eine ausführliche Untersuchung mit theoretischen Erörterungen wurde dann von F. Neumann in der bereits erwähnten Arbeit durchgeführt. Im Anschluß daran sind von Czapsky (32) diese Fragen weiter verfolgt worden. Er konnte auch zeigen, daß eine Glasplatte z. B. aus Spiegelglas durch eine Schmalseite parallel zur Glasoberfläche beobachtet, doppelbrechend ist, und zwar an den verschiedenen Stellen des Querschnitts mit verschiedenem Vorzeichen. Die Mittelpartie parallel zu den Kanten ist am stärksten doppelbrechend, sie wird auf jeder Seite von einer neutralen Faser begrenzt, denen unmittelbar längs der Kanten wieder doppelbrechende Zonen folgen. Das Vorzeichen der Mittelpartie ist positiv in bezug auf die Längsrichtung, entspricht also einem isotropen, durch Dehnung doppelbrechend gemachten Streifen. Die Randpartien sind negativ, entsprechen also einem durch Druck positiv gemachten Streifen. Diese Spannungsverhältnisse kommen durch die Abkühlung der Glasschmelze zustande. Die äußeren Teile erstarren zuerst und verhindern so die mittleren Partien sich soweit zusammenzuziehen, als es ihrer Temperatur nach der Abkühlung entsprechen würde, und versetzen diese somit in einen Zustand der dauernden Dehnung. Die äußeren Partien dagegen, die diesen Dehnungskräften entgegenwirken, kommen somit in einen Druckzustand.

Die Doppelbrechungserscheinungen, die im allgemeinen einem jeden Glas in bestimmtem Grade eigentümlich sind, lassen sich in starkem Maße dadurch erzeugen, daß man ein erweichtes Glas absichtlich rasch abkühlt. Man erhält dann die für Demonstrationszwecke bekannten bleibenden Interferenzkurven bis zu hohen Ordnungen. Da von den optischen Gläsern möglichste Spannungsfreiheit verlangt wird, so wird bei deren Herstellung in einem besonderen Kühlverfahren für eine möglichst gleichmäßige und sehr langsame Kühlung Sorge getragen. Mit dem Studium der Kühlvorgänge mit Hilfe der akzidentellen Doppelbrechung befassen sich u. a. Arbeiten von Adams und Williamsen (1), Schultz (86), English und Turner (36), Weidert und Berndt (99). (Vgl. auch Preston (77).) Tuzi (95) hat neuerdings auch an dem von ihm bezüglich seiner Doppelbrechungseigenschaften untersuchten Kunstharz „Phenolith" Untersuchungen an erwärmten Stücken im polarisierten Licht ausgeführt.

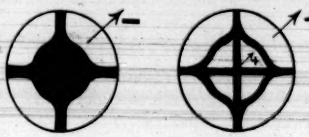
Während bei Fabrikations- und Verarbeitungsprozessen von Gläsern schon seit langem mit Erfolg Homogenitätsprüfungen im polarisierten Licht durchgeführt werden, bedient man sich meines Wissens in den Herstellungsprozessen von plastischen Massen noch kaum dieser Methoden. Eine gemeinschaftlich von K. Haupt und dem Verfasser (44) angestellte Untersuchung an Kaseinkunsthorn konnte aber zeigen, daß man auch in solchen Fällen wichtige Aufschlüsse über die Homogenität des fertigen Produktes sowie Richtlinien für eine zweckmäßige Gestaltung von bestimmten Arbeitsgängen während der Fabrikation erhalten kann.

Das Kaseinkunsthorn, das für Isolationszwecke und für verschiedene andere Gegenstände verwandt wird, wird prinzipiell in der Weise hergestellt, daß man schwach angefeuchtetes Kasein unter starkem Druck und unter Wärme verknetet und dann mit Hilfe von Strangpressen durch eine enge Öffnung zu Stäben verpreßt. Diese Stäbe werden dann in einem Formaldehydbad schwacher Konzentration gehärtet, worauf sie noch einer Trocknung in heißer Luft unterworfen werden. Da diese Stäbe zur Herstellung von kleinen Teilen durchweg auf Automaten verarbeitet werden, so sind an ein gut zu verarbeitendes Material die Forderungen zu stellen, daß es soweit frei von inneren Spannungen sein muß, daß die Stäbe in den Automaten nicht springen.

Um einen Überblick über den Spannungszustand fertiger Stäbe zu erhalten, wurden aus solchen ungefärbten Materials verschiedener Dicke und verschiedener Herkunft senkrecht zur Stabachse etwa 2 mm dicke parallel begrenzte Scheiben geschnitten, die hinreichend durchsichtig waren, um eine gute Beobachtung zu ermöglichen. (In größeren Schichtdicken ist das Material undurchsichtig.) Zwischen gekreuzten Nicols zeigten alle Proben das typische Bild eines Sphärokristalles, also konzentrisch angeordnete Interferenzfarben, die entsprechend den Polarisationsrichtungen von einem schwarzen Kreuz durchsetzt sind. Die Gangdifferenzen stiegen bei den meisten Proben nach dem Rand zu an. Es waren aber auch solche dabei, die eine konzentrische neutrale Zone aufwiesen, von der aus sowohl nach dem Rand als nach dem Zentrum zu die Doppelbrechung zunahm. Das Vorzeichen war selbstverständlich nach beiden Richtungen entgegengesetzt.

Um ein Urteil über die Ursache der Doppelbrechung und insbesondere darüber zu erhalten, ob es zulässig ist, aus diesen Erscheinungen Schlüsse auf innere Spannungen, die den Verarbeitungsprozeß gefährden können, zu ziehen, wurden systematische Untersuchungen des Produktes während des Fabrikationsgangs angestellt. Ein unmittelbar aus der Strangpresse kommender Stab zeigte in den entnommenen Proben keinerlei Doppelbrechung. Dadurch war die Möglichkeit, daß die Doppelbrechung viel-

leicht durch Gleichrichtung anisotroper „Bausteine" während der Pressung zustande gekommen sei, wie es z. B. bei sehr stark gedehntem Zelluloid der Fall ist, ausgeschlossen. Die Anisotropie war also als in inneren Spannungen begründet anzunehmen. Diese Spannungen entstehen wie sich weiter zeigt, vorwiegend während des Härteprozesses, in dessen Verlauf auch in manchen Fällen die entgegengesetzten Spannungszustände zwischen Zentral- und Randpartien zustande kamen. Das Formaldehydwassergemisch, das zur Härtung verwandt wird, kommt nämlich in doppelter Weise zur Wirkung. Wird ein frischgepreßter Stab in die Härteflüssigkeit gebracht, so wirkt diese, durch den Zylindermantel eindringend, zunächst vorwiegend quellend. Die



a b

Fig. 4. Nach Haupt und Wächtler (44).

einem solchen Stab entnommene Probe zeigt ein Bild, wie Fig. 4a. Nach längerem Verbleiben in der Härteflüssigkeit zeigt sich dann die in Fig. 4b skizzierte Erscheinung. Das Vorzeichen der Doppelbrechung der Zentralpartie läßt, da das der Randpartie einer Quellung zugeordnet ist, jetzt auf Schrumpfung dieser Teile schließen. Der Grund hierfür ist darin erblickt worden, daß die Härteflüssigkeit beim Eindringen in den Stab durch Diffusion ihre Konzentration erhöht und so den noch weiter zentral gelegenen Teilen begierig Wasser entzieht, wodurch in diesen Schrumpfspannungen entstehen. Ein optisches Studium der Härtung in Bädern verschiedener Konzentration gestattet nun diejenige Konzentration zu bestimmen, bei der möglichst geringe innere Spannungen auftreten, bei der also von diesem Gesichtspunkt aus dasjenige Material entsteht, das dem geringsten Bruchrisiko bei der automatischen Verarbeitung ausgesetzt ist.

Eine Längsschnittbeobachtung an Stäben zeigte, wie aus den Querschnittsuntersuchungen zu erwarten war, ein Bild, das dem von Czapsky bei Gläsern gefundenen ganz analog ist. Parallel zu den Kanten des Streifens verläuft je eine neutrale Zone, die die negativ doppelbrechende Zentralpartie (Schrumpfung) von den beiden positiven Randpartien (Quellung) trennt. Eine Verfolgung des Trocknungsprozesses ergab in manchen Fällen noch eine Steigerung der Randspannungen, zeigte aber kein weiteres prinzipiell interessantes Resultat.

Anwendung der akzidentellen Doppelbrechung zur Ermittlung des Spannungszustandes in einem mechanisch beanspruchten Modellkörper.

1. Die Grundlagen des Verfahrens.

a) Allgemeines.

Neben den mehr qualitativen Untersuchungsmethoden die Homogenität eines Materials zu prüfen, bietet sich ein weiteres Anwendungsgebiet für quantitative Doppelbrechungsstudien in der Möglichkeit, an Modellen aus durchsichtigen, isotropen Stoffen die Verteilung von Spannungen in den verschiedenartigsten Versuchskörpern unter den mannigfaltigsten Beanspruchungsbedingungen zu ermitteln. Es handelt sich dabei einmal darum, bestimmte Beispiele von Beanspruchungsverteilungen, die auf Grund von elastizitätstheoretischen Ansätzen errechnet worden sind, einer experimentellen Prüfung zu unterziehen, als auch besonders um das Studium von solchen Fällen, die einer theoretischen Behandlung infolge der komplizierten Gestalt der zu untersuchenden Modelle nicht exakt zugänglich sind. Andere experimentelle Prüfungen, wie Bruch- oder Zerreißversuche, sind in den meisten Fällen nicht geeignet, sichere Schlüsse über die Verteilung von Spannungen bei normalen Belastungsbedingungen zu gestatten, da die Verteilung der Spannungen beim Bruch meist eine ganz andere ist als bei den technisch zulässigen Belastungen. In manchen Fällen lassen sich weiterhin aus Oberflächenerscheinungen von beanspruchten polierten Metallteilen, aus den sog. Fließfiguren gewisse Schlüsse über die Spannungsverteilung ziehen (z. B. Hartmann (43)). Doch kommt diesem Verfahren keine solche Bedeutung zu wie den optischen Methoden, da es sich dabei vorwiegend um Studien über das Verhalten von Oberflächenpartien handelt und die Fließfiguren erst bei sehr starker Beanspruchung (meist Überschreiten der Elastizitätsgrenze) auftreten, also unter Bedingungen, die auch für die meisten praktischen Belastungsfälle ohne Interesse sind. Da es sich bei den Konstruktionsteilen, in denen man die Spannungsverteilung kennen will, größtenteils um Körper aus Metall oder anderen undurchsichtigen Materialien handelt, so muß man für die optische Prüfung, die durchsichtige Stoffe erfordert, die Modelle aus anderen Materialien herstellen. Doch läßt sich zeigen, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Spannungsverteilung im Modell und im eigentlichen Konstruktionsstück ähnlich bleibt.

Die Anwendung der polarisations-optischen Spannungsuntersuchung ist grundsätzlich auf die Prüfung ebener Spannungszustände beschränkt, denn nur dann, wenn auf dem Wege,

den ein Lichtstrahl durch den Körper nimmt, überall die gleichen Kräfte und damit auch die gleiche Doppelbrechung vorhanden ist, ist eine völlig eindeutige Bestimmung der Spannungen möglich. Ein dreidimensionaler Spannungszustand scheidet daher für diese Untersuchung aus.

Wie in der Elastizitätstheorie gezeigt wird, ist ein beliebiger räumlicher Spannungszustand völlig bestimmt, wenn man für jeden Punkt die Komponenten der Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z, und der Tangentialspannungen τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} angeben kann. Der ebene Spannungszustand z. B. in der XY-Ebene geht nun aus den dreidimensionalen Verhältnissen hervor, wenn von den 6 obigen Bestimmungsgrößen die Größen σ_z und τ_{yz}, τ_{zx} den Wert Null annehmen.

b) Über die Ähnlichkeit des Spannungszustandes im durchsichtigen Modell und im eigentlichen Konstruktionsteil.

Die Frage, inwieweit die an einem Modell aus einem durchsichtigen isotropen Material auf optischem Wege ermittelte Spannungsverteilung Schlüsse auf die Verteilung in Körpern aus technischen Materialien gestattet, bildet die wichtigste Grundlage für die praktische Anwendungsmöglichkeit dieser Methode. Mesnager (73, 74), Coker (19) und Filon (37) haben diese Bedingungen untersucht. Im Fall einer dreidimensionalen Beanspruchung zeigt sich, daß die Spannungsverteilung von der Poissonschen Konstanten abhängt. Beim ebenen Problem dagegen besteht im allgemeinen keine Abhängigkeit von einer Materialkonstanten. Den Nachweis hierfür brachte Mesnager auf folgende Weise.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungskomponenten reduzieren sich für das ebene Problem (in der XY-Ebene) zu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy} &= 0 \\ \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Bestimmungsgleichungen der Spannungskomponenten, die die Beziehung zu den Dilatationen ξ, η darstellen, vereinfachen sich zu:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right) + 2\mu\frac{d\xi}{dx} \\ \sigma_y &= \lambda\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right) + 2\mu\frac{d\eta}{dy} \\ \tau &= \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei sich die Koeffizienten λ und μ durch die Materialkonstanten E (Elastizitätsmodul) und m (Poissonsche Konst.)[1]) darstellen lassen, als:

$$\mu = \frac{E}{2\left(\frac{1}{m}+1\right)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{E}{\left(\frac{1}{m}+1\right)\frac{1}{m-2}}$$

Bildet man von σ_x und σ_y die 2. Ableitungen nach x und y, und bezeichnet die Summe davon mit $\Delta_2(\sigma_x+\sigma_y)$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2(\sigma_x+\sigma_y) &= \frac{d^2\sigma_x}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_y}{dy^2} + \frac{d^2\sigma_y}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_x}{dy^2} \\ &= (\lambda+2\mu)\frac{d^3\xi}{dx^3} + \frac{d^3\eta}{dy^3} + \frac{d^3\xi}{dx\,dy^2} + \frac{d^3\eta}{dy\,dx^2} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Andrerseits folgt aber aus den Gleichungen (1) durch Differentiation der ersten Gleichung nach x und der zweiten nach y und Addition:

$$\frac{d^2\sigma_x}{dx^2} + \frac{2\,d^2\tau}{dx\,dy} + \frac{d^2\sigma_y}{dy^2} = 0.$$

Setzt man hierin die Werte von σ_x und σ_y aus den Gleichungen (2) ein, so ergibt sich:

$$(\lambda+2\mu)\frac{d^3\xi}{dx^3} + \frac{d^3\eta}{dy^3} + \frac{d^3\xi}{dx\,dy^2} + \frac{d^3\eta}{dx\,dy^2} = 0.$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (3):

$$\Delta_2(\sigma_x+\sigma_y) = 0.$$

Diese Gleichung, die zusammen mit Gleichungen (1) und den Randbedingungen die ebene Spannungsverteilung vollständig bestimmt, ist unabhängig von einer Materialkonstanten[2]).

Da bei den Modellen ein ebener Spannungszustand infolge der endlichen Begrenzung der Versuchsstücke nicht streng zu realisieren ist, so ist die Frage zu prüfen, ob eine Dickenänderung eventuell die Verhältnisse verändert. Im allgemeinen zeigt sich nun, daß es zulässig ist, auch ein solches Problem als zweidimensionales zu behandeln.

c) Über die Eigenschaften verschiedener Modellmaterialien.

Unter der Voraussetzung, daß der durchsichtige Körper, aus dem man Modelle für die polarisationsoptischen Spannungsstudien herstellen will, isotrop ist und das Hookesche Ge-

1) $\frac{1}{m} = \frac{\text{Querkontraktion}}{\text{Längsdilatation}}$.

2) Zunächst ist hierbei ein einfach zusammenhängender Rand (also das Fehlen von Löchern usw. im Innern) vorausgesetzt. Bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen verschwinden die Elastizitätskonstanten nicht aus den Gleichungen, es lassen sich aber Korrektionen angeben, so daß die optische Methode auch in solchen Fällen anzuwenden ist. (Siehe Filon (37).)

Tabelle I.

Material	Spez. Doppelbrechung $G_\rho = G/E$		Elastizitätsmodul E [kg/cm²]	Elastizitätsgrenze [kg/cm²]
	$G\left[\frac{n_a - n_o}{l/L}\right]$	$G_\rho\left[\frac{n_a - n_o}{\text{kg/cm}^2}\right]$		
Glas (Kronglas, je nach Zusammensetzung)	König (61) $\frac{160}{\text{bis } 180} \times 10^{-3}$	$\frac{2{,}0}{\text{bis } 3{,}6} \times 10^{-7}$ [1]	$\frac{500}{\text{bis } 800} \times 10^3$	
	Heymans u. Allis (47)	$2{,}51 \times 10^{-7}$	731×10^3	320
	Ramspeck (78)			
Zelluloid	$\frac{5}{\text{bis } 46} \times 10^{-3}$ $\left(\frac{50\text{ Proz.}}{0\text{ Proz.}}\text{ Kampfer}\right)$	$\frac{2{,}1}{19{,}0} \times 10^{-7}$	$22{,}5 - 23{,}3 \times 10^3$	350
	Heymans u. Allis (47)	$12{,}1 \times 10^{-7}$	$25{,}5 \times 10^3$	274
Bakelith	Arakrawa (8) $\frac{190}{\text{bis } 270} \times 10^{-3}$	ca. 50×10^{-7}	$\frac{38}{\text{bis } 53{,}8} \times 10^3$	
Phenolith	Tuzi (93) ca. 180×10^{-3}	ca. 50×10^{-7}	$36{,}8 \times 10^3$	300 Bruch
Geschmolzener Quarz	Heymans u. Allis (47) 239×10^{-3}	$3{,}4 \times 10^{-7}$	703×10^3	428
Gelatine verschiedener Konzentration (in Wasser)	Leick (69) $\frac{0{,}4}{\text{bis } 2{,}2} \times 10^{-3}$ $\left(\frac{10\text{ Proz.}}{45\text{ Proz.}}\right)$	$\frac{1{,}65}{\text{bis } 0{,}75} \times 10^{-3}$	$\frac{242}{\text{bis } 2944} \times 10^{-3}$	
	König (62) $\frac{0{,}19}{\text{bis } 0{,}25} \times 10^{-3}$			

setz befolgt, ist nach den bisherigen Ausführungen jedes Material zur Untersuchung ebener Spannungsverteilungen prinzipiell geeignet. Es würden also u. a. Glas, geschmolzener Quarz, Gelatine, Zelluloid, Zellon, Bakelith, Phenolith in Betracht kommen. Früher verwandte man ausschließlich Glas, aber vorwiegend zwei weitere Anforderungen, die man an das Material stellte, eine möglichst große spezifische Doppelbrechung und eine leichtere Bearbeitbarkeit waren der Grund, auch andere Körper auf ihre Eignung hin zu untersuchen. Während Gelatine nur für spezielle Untersuchungen benutzt wurde, ist das Zelluloid in neuerer Zeit in großem Maße gebraucht worden. Besonders die bequeme Herstellung von Versuchskörpern komplizierter Gestalt, die aus Glas anzufertigen schwierig und kostpielig ist, hat zu der großen Verbreitung beigetragen. Da nun aber das Zelluloid ein Mischkörper aus zwei entgegengesetzten kristallinischen Komponenten ist, so zeigt es, insbesondere bei starker Dehnung keinen einfachen Verlauf der Doppelbrechung als Funktion der Dehnung. Dadurch können unter Umständen Verhältnisse entstehen, bei denen die Ähnlichkeit in der Abbildung der Spannungsverteilung in Frage gestellt wird.

Über die Eigenschaften der verschiedenen Materialien erhält man aus der obenstehenden Tabelle einen Überblick.

Gelatine, die den größten Wert von G_ρ hat, eignet sich nur für spezielle Untersuchungen, bei denen nur sehr geringe Kräfte auftreten dürfen. Im allgemeinen kommt sie für die Herstellung von Modellen wegen ihrer geringen Festigkeit und ihres inkonstanten Verhaltens (infolge Wasserabgabe usw.) praktisch nicht in Betracht.

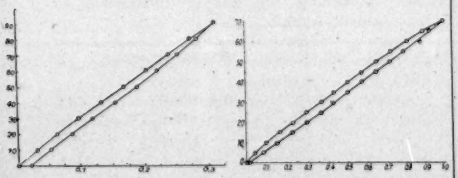
Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Doppelbrechung und Deformation bzw. Spannung, innerhalb der Elastizitätsgrenze ist

[1] Diese Werte sind unter Zugrundelegung der Werte von E (nach Kohlrausch) berechnet. Sie können also nur als Abschätzungen betrachtet werden, da für die Glaswerte für die G bestimmt wurde, E nicht angegeben ist.

insbesondere an Glas von den verschiedensten Autoren untersucht worden und immer konnte ein proportionaler Zusammenhang festgestellt werden. An Zelluloid konnte Rossi (80a), Ramspeck (78), Filon und Jessop (40), Coker (19), an Phenolith Tuzi (93), an Gelatine Leick (69), König (62) denselben einfachen Verlauf bestätigen.

Die Materialien Zelluloid, Gelatine, Phenolith und Bakelith zeigen im Gegensatz zu Glas Zeit- und Resteffekte. Nach den Untersuchungen von Hartmann und Ramspeck (78) tritt beim Anlegen der Spannung beim Zelluloid die Doppelbrechung nicht sofort wie beim Glas in ihrem endgültigen Wert auf, sondern erreicht erst nach einer bestimmten Zeit den Endwert, und zwar nimmt die Doppelbrechung bei konstanter Belastung mit der Zeit ab, bei konstanter Dehnung dagegen zu. Die Veränderung erfolgt innerhalb der Elastizitätsgrenze nach Ramspeck nach einem Exponentialgesetz, während Filon und Jessop (40) keine so einfache Beziehung finden konnten. Wird ferner nach länger andauernder Belastung diese plötzlich entfernt, so klingt die Doppelbrechung allmählich ab. Filon und Jessop konnten beobachten, daß nach einiger Zeit, „das Kriechen" praktisch aufhörte und ein Grenzwert angenommen wurde, während Ramspeck eine solche Feststellung nicht machen konnte. Seine Streifen zeigten bei konstanter Belastung auch nach 8 Tagen noch eine geringe Zunahme der Doppelbrechung.

Neben diesem Zeiteffekt zeigen die Körper auch, wenn sie belastet und dann wieder entlastet werden, meist noch eine Restdeformation und die Kurve, die die Spannung als Funktion der Verlängerung darstellt, fällt bei Belastung und Entlastung nicht genau zusammen, wie das z. B. bei Glas der Fall ist. Fig. 5a und b zeigt diese Resultate an Phenolith und Zelluloid nach Tuzi (93). (Als Ordinate ist die Belastung in kg, als Abszisse die Verlängerung in Proz. aufgetragen.)



a b

Fig. 5. Nach Tuzi (93).

Wendet man stärkere Deformationen, bei denen die Elastizitätsgrenze überschritten wird, an, so besteht im allgemeinen kein einfacher Zusammenhang mehr zwischen Doppelbrechung und Deformation bzw. Spannung. Glas scheidet jetzt aus den Betrachtungen aus, da es keine bleibenden Verlängerungen gestattet. Die bei den anderen Körpern früher zunächst gestellte Frage, ob jetzt Proportionalität mit der Dehnung oder der Spannung besteht, läßt im allgemeinen keine einfache Beantwortung mehr erwarten, da es sich bei den meisten Körpern um Gele mit kristallinen „Bausteinen" handelt. Bei Gelatine fanden Leick (69) und Rossi (17), daß die Doppelbrechung proportional mit der Verlängerung wächst; Bjerkén (81) dagegen konnte keinen einfachen Zusammenhang feststellen. Bei Kautschuk fand Rossi Proportionalität mit dem Zug, Bjerkén dagegen auch wieder keinen einfachen Zusammenhang.

Beim Zelluloid konnten Rossi und Bjerkén gleichfalls keinen einfachen Zusammenhang finden. Durch die Arbeiten von Ambronn (4), die er, veranlaßt durch einige merkwürdige Beobachtungen, die Aue im Verlauf seiner Arbeit machte, aufnahm und bei denen er sich nicht nur auf eine phänomenologische Untersuchung beschränkte, sondern in das Wesen der Doppelbrechung dieses Mischkörpers einzudringen versuchte, wurde einleuchtend, daß ein einfacher Verlauf der Doppelbrechung hier nicht zu erwarten ist. Das Zelluloid besteht bekanntlich aus Nitrozellulose, die bei der Fabrikation innig mit Kampfer vermischt wird. Das Vorzeichen der Doppelbrechung, die diese Nitrozellulose zeigt, ist positiv, die Kampferkristalle dagegen sind negativ doppelbrechend. Es war daher naheliegend, aus diesem Aufbau eine Deutung für das merkwürdige optische Verhalten zu geben. Ambronn fand nämlich, daß das Zelluloid bei schwacher Deformation positiv in bezug auf die Dehnungsrichtung doppelbrechend wird, bei stärkerer Dehnung hingegen das entgegengesetzte Vorzeichen der Doppelbrechung zeigt. Bei schwachen Dehnungen war annähernd normale Dispersion der Doppelbrechung vorhanden, bei größeren Dehnungsstufen dagegen lagen ganz anomale Verhältnisse, wie sie für Mischkörper aus zwei optisch entgegengesetzten Komponenten charakteristisch sind (3) vor. Die Vermutung, den eigentümlichen Sachverhalt aus dem Zusammenwirken der beiden Komponenten, die im undeformierten Material als submikroskopische Teilchen völlig regelloser Orientierung als Gesamtwirkung Isotropie ergeben, aber durch starke Dehnung gerichtet werden, zu erklären, wurde durch eine weitere Beobachtung gefestigt. Wird der Kampfer herausgelöst, so zeigt sich positive Doppelbrechung, die durch Einlagerung von Kampfer wieder negativ gemacht werden kann. Quantitativ ist der Verlauf vom Ver-

fasser (96) untersucht worden. Fig. 6a zeigt das Beobachtungsresultat an „unentkampfertem Zelluloid", Fig. 6b stellt die Kurve des mit „Xylol entkampferten" dar. Wenn das Material über die Elastizitätsgrenze gedehnt ist und gleichzeitig noch unter der Einwirkung einer äußeren Kraft steht, die bei den obigen Messungen da-

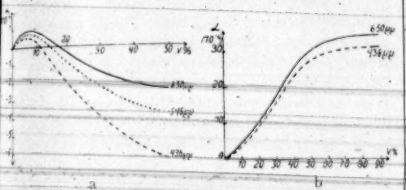


Fig. 6. Nach Wächtler (96).

durch eliminiert war, daß nur Streifen, die nach der Dehnung aus der Dehnungsvorrichtung entfernt und längere Zeit sich selbst überlassen waren, untersucht wurden, so wird sich dieser Spannungseinfluß noch überlagern und den Kurvenverlauf verändern. Wie im einzelnen die Kurven verlaufen, hängt von der chemischen Zusammensetzung, insbesondere vom Kampfergehalt, der bei den verschiedenen Zelluloidsorten sehr verschieden sein kann, ab. Je kampferärmer das Zelluloid ist, desto mehr verlaufen die Kurven im positiven Gebiet. Genauere Untersuchungen liegen hierüber noch nicht vor. Fig. 7 zeigt die Beobachtungsresultate an der von A. Ramspeck untersuchten Zelluloidsorte.

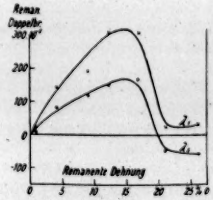


Fig. 7. Nach Ramspeck (78).

Im Anschluß an die von mir auf Grund der beschriebenen Beobachtungen erhobenen Bedenken (97) gegen die Verwendung von Zelluloid zu Modellen, wenigstens in den Fällen, bei denen eine stärkere Belastung, die zu bleibenden Dehnungen führen kann, möglich ist, hat Savur (82) an dem von Coker zu seinen Untersuchungen verwandten Xylonit (d. i. eine Zelluloidart) ähnliche Versuche wiederholt. Dabei hat er gefunden, daß bei seinem Material die Kurve der Doppelbrechung als Funktion der bleibenden Verlängerung stets ansteigt, mit größerer Deformation allerdings immer weniger. Ein Umbiegen oder gar einen Vorzeichenwechsel konnte er nicht feststellen. Dieses Resultat ist nach allen an deutschen Zelluloidsorten gemachten Beobachtungen zunächst ganz unerklärlich. Die Möglichkeit, die Savur erwähnt, um die Differenz der Resultate zu erklären, daß unsre Messungen vielleicht auf einer falschen Meßmethode beruhen, kann keine Klarheit bringen. Sowohl Ambronn wie ich haben eine einwandfreie Meßmethode angewandt. Die Messungen wurden im monochromatischen Licht vorgenommen und die Ordnung der Gangdifferenz wurde dadurch bestimmt, daß die Streifen mit einem Keil versehen wurden, um die Ordnung abzuzählen. Es bleibt also im Augenblick nur übrig, den Grund in verschiedenen Materialeigenschaften zu suchen. (Vielleicht ist das Xylonit praktisch so kampferarm, daß seine Kurve der des „entkampferten" Zelluloids ähnlich verläuft.)

Wenn auch ohne weiteres zugegeben werden kann, daß die Verwendung von Zelluloidmodellen bei mäßiger Beanspruchung, wobei eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze ausgeschlossen ist, einwandfreie Resultate liefert und eine Ähnlichkeit der Spannungsverteilung gewährleistet, so sind doch die auf Grund der verschiedenen Anomalien erhobenen Bedenken verständlich. Das trifft besonders zu, wenn komplizierte Versuchskörper studiert werden, deren Spannungsverteilung noch so unbestimmt ist, daß infolge starker Spannungskonzentration an manchen Stellen bleibende Deformation eintreten kann. Auf Grund allgemeinerer Überlegungen hat zuerst Pockels (76_3) solche Bedenken geäußert. Mesnager (74) hat dann bei seinen umfangreichen Arbeiten auch das Zelluloid, das meines Wissens zuerst von Hönigsberg (52) gelegentlich verwandt wurde, in dem Bestreben ein leichter zu bearbeitendes Material zu finden, näher untersucht. Er fand aber kein Material, das ihm genügte und blieb deshalb bei Glasmodellen. Im Anschluß an seine Arbeit hat auch A. Ramspeck Bedenken geäußert. Diese Einwände hat Heymans (51) in einer Erwiderung zu zerstreuen gesucht. Dazu hat W. König (67) nochmals ausführlich Stellung genommen und den Sachverhalt genau klargestellt. Neuerdings ist auch von anderer Seite (Tuzi) versucht worden, an Stelle von Zelluloid ein anderes Material (Phenolith) für die Modelle zu verwenden.

d) Über die Methoden zur völligen Bestimmung der Spannungen auf Grund der Messungen im polarisierten Licht.

Für einen Punkt P der XY-Ebene ist der Spannungszustand völlig bestimmt, wenn man zu

jedem beliebigen Linienelement ds durch P die Spannung nach Größe und Richtung angeben kann. Das ist bei Kenntnis der drei Komponenten σ_x, σ_y, τ der Fall. Läßt man nun ds einen Winkel von 360^0 durchlaufen und trägt die zu jeder Stellung zugehörigen Spannungswerte ihrem Absolutwert nach den entsprechenden Winkelstellungen von ds gemäß, von P aus auf, so liegen die Endpunkte der absoluten Spannungswerte auf einer Ellipse. Es gibt also für jeden Punkt P von sämtlichen Richtungen, die die Spannung hier haben kann, zwei ausgezeichnete aufeinander senkrechte, in denen die Spannung ihren Maximal- bzw. Minimalwert hat. In diesen Richtungen, die man als Hauptspannungsrichtungen bezeichnet, sind die Spannungen reine Normalspannungen. Es ist also hier $\tau = 0$. Man nennt diese Spannungen die Hauptspannungen. Diese Hauptspannungen σ_1 und σ_2 bestimmen ebenfalls bei Angabe des zugehörigen Winkels der Hauptspannungsrichtung gegen eine Koordinatenachse vollständig den Spannungszustand in P. Man kann also auch an Stelle der Angabe der drei Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 und den Winkel φ zur völligen Bestimmung des Spannungszustandes in P benutzen. Sind letztere Bestimmungsstücke gegeben, so kann man z. B. nach der von Mohr angegebenen Methode (vgl. z. B. Föppl, III. Bd, S. 31) mit Hilfe des Spannungskreises für jede Richtung die Komponenten σ und τ ermitteln.

Die analytische Beziehung, die zwischen den beiden Darstellungsarten des ebenen Spannungszustandes besteht, ergeben sich folgendermaßen:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi,$$
$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2\varphi + \sigma_2 \cos^2\varphi,$$
$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Hierbei bedeutet σ_1 den Absolutwert der größten der beiden Hauptspannungen und φ ihren Winkel gegen die positive X-Achse.

Wenn man in einer genügend großen Zahl von Punkten der XY-Ebene die Richtungen der Hauptspannungen durch Einzeichnen des entsprechenden Achsenkreuzes der „Indexellipse" markiert, so kann die XY-Ebene mit einem System sich orthogonal schneidender Kurven bedeckt werden, die in jedem Punkt durch die Richtung ihrer Tangenten die Hauptspannungsrichtung angeben. Man bezeichnet diese Kurven als Spannungstrajektorien. Die Ermittlung dieser Trajektorien bildet den einen Teil der Aufgabe mit Hilfe der polarisationsoptischen Methode die Spannungszustände zu bestimmen. Der andere besteht in der Ermittlung der absoluten Beträge der Hauptspannungen.

Wenn man von einer punktweisen Bestimmung der optischen Eigenschaften (vgl. z. B. Steinheil und Rieth) absieht, sondern eine Registrierung der beweglichen „Nullinien" (vgl. S. 501) vornimmt, erhält man nicht unmittelbar die Trajektorien, sondern zunächst eine andere Kurvenschar, aus der die Trajektorien dann konstruiert werden können. Diese Kurven sind die Linien gleicher Neigung der Hauptspannungsrichtungen, die sog. „Isoklinen". Die Isoklinen, über deren Bestimmung bereits gesprochen wurde, liefern somit ein Richtungsfeld, zu dem die Trajektorienscharen zu suchen sind. Diese Aufgabe löst man mit Hilfe der Methoden zur graphischen Integration linearer Differentialgleichungen. So erhält man z. B. eine Schar der Hauptspannungsrichtungslinien folgendermaßen: Es seien in Fig. 8 AB und CD zwei benachbarte

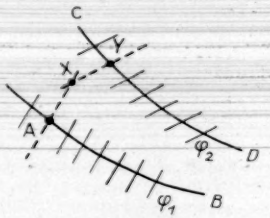


Fig. 8.

Isoklinen mit den in gleichen Abständen unter den gemessenen Winkeln (φ_1 und φ_2) aufgetragenen Richtungselementen. Von A auf dem durch diesen Punkt gehenden Richtungselement vorwärtsschreitend, gelangt man zum Nachbarpunkt X und dann zu Y, indem man zu den Richtungselementen von CD eine Parallele durch einen Punkt Y zieht, der so gewählt werden muß, daß $AX = XY$ wird, usw. Die andere Schar der Trajektorien wird dann so konstruiert, daß die Kurven derselben diejenigen der ersten Schar senkrecht schneidet.

Zur Bestimmung des Absolutwertes der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 wird zunächst die algebraische Differenz der Hauptspannungswerte $\sigma_1 - \sigma_2$ nach Größe und Vorzeichen bestimmt. Darauf muß noch die Summe der Hauptspannungen $\sigma_1 + \sigma_2$ festgelegt werden. Während die erste Bestimmung leicht und nach einer Methode ausgeführt wird, ist die Ermittlung der zweiten Größe nicht immer einfach und es sind eine ganze Reihe von Verfahren dafür ausgebildet worden. In zahlreichen Fällen, in denen man nur spezielle Untersuchungen vornimmt und nicht an einer völligen Ermittlung des Spannungszustandes interessiert ist, sieht man daher von der Bestimmung von $\sigma_1 + \sigma_2$ ab. So ist z. B. aus den obigen Gleichungen

ersichtlich, daß die Schubspannungskomponente τ bereits durch den Winkel φ und die Größe $\sigma_1 - \sigma_2$ bestimmt ist; wenn also bei einer bestimmten Problemstellung nur die Schubspannungskomponente studiert werden soll, so erübrigt es sich $\sigma_1 + \sigma_2$ zu ermitteln.

Um die Größe $\sigma_1 - \sigma_2$ zu erhalten, bedient man sich der empirisch gefundenen Beziehung, wonach die akzidentelle Doppelbrechung eines isotropen Körpers bei Beanspruchung innerhalb der Elastizitätsgrenze proportional der Hauptspannungsdifferenz ist. Es ist also: $\gamma = C(\sigma_1 - \sigma_2)\, d$, wobei γ wieder die Phasendifferenz zwischen außerordentlichem und ordentlichem Strahl, d die Dicke der durchstrahlten Schicht und C eine Materialkonstante ist. Wenn es sich also nur darum handelt, die relative Spannungsverteilung über eine bestimmte Fläche zu untersuchen, so kann direkt die Phasendifferenz als Maß für den absoluten Betrag des Spannungszustandes in den einzelnen Punkten aufgetragen werden.

Im weißen Licht werden zwischen gekreuzten Nicols diejenigen Stellen für die $\sigma_1 - \sigma_2$ von Null verschieden ist (und die nicht mit den Polarisationsrichtungen parallele Hauptspannungsrichtungen haben) bestimmte Interferenzfarben zeigen. Ist die Beanspruchung hinreichend groß, so wird das Gesichtsfeld von einer Anzahl Kurven verschiedener Farbe erfüllt sein. Die Kurven gleicher Farbe, die sog. „Isochromaten", verbinden Punkte gleicher Hauptspannungsdifferenz. Ihre Aufnahme gestaltet sich besonders zweckmäßig im zirkularpolarisierten Licht, weil dabei die Isoklinen nicht auftreten. Für quantitative Messungen kann man die Isochromaten meist nicht direkt aus den Interferenzlinien ermitteln, da die Unterscheidung der Farbnuancen oft schwierig ist und in vielen Belastungsfällen auch keine so starken Beanspruchungen vorkommen, daß verschiedenfarbige Interferenzfarben auftreten, sondern nur eine verschieden starke Aufhellung des Gesichtsfeldes eintritt. In solchen Fällen muß man daher $\sigma_1 - \sigma_2$ mit einem Kompensator bestimmen und aus den für die einzelnen Punkte erhaltenen Werten dann die Isochromaten aufzeichnen, wenn ihre Kenntnis notwendig ist.

Das eine Verfahren zur Bestimmung der Summe $\sigma_1 + \sigma_2$ ist von Mesnager verwandt worden. Es beruht auf der Tatsache, daß man die Summe der durchschnittlichen Werte der Hauptspannungen in einer ebenen Platte durch Ermittlung der Querkontraktion der Platte an der Beobachtungsstelle feststellen kann. Bei einer elastischen Deformation erfährt die Platte eine Querkontraktion von $\Delta D = (\sigma_1 + \sigma_1) : mE$. Sind die Größen m und E bekannt, so ist zur Bestimmung von $\sigma_1 + \sigma_2$ nur die Dickenänderung festzustellen. Diese Größe ist sehr klein (z. B. bei einer Glasplatte von 10 mm Dicke und bei einer Belastung von $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ kg ist, wenn $m = 4$ und $E = 5000$ angenommen wird $\Delta D = 2\,\mu$), ihre Messung also sehr schwierig. Mesnager, der für seine Modelle Glasplatten verwandte, nahm sie mit Hilfe einer Interferenzmethode vor. Da diese aber genau planparallele polierte Oberflächen der Modelle erfordert, eine Bedingung, die im allgemeinen von den Versuchskörpern nicht in so vollkommener Weise erfüllt wird, hat sich das Interferenzverfahren nicht eingeführt. Viel bequemer ist die Messung mit Hilfe eines mechanischen Dickenmessers, den Coker (24) in einer sehr empfindlichen Form ausgeführt hat. Fig. 9 zeigt den Apparat.

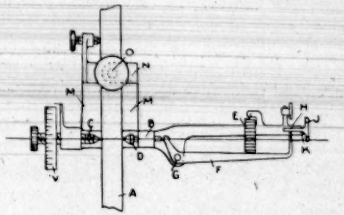


Fig. 9. Nach Coker (24).

Der zu messende Körper A befindet sich zwischen zwei Spitzen C und D, von denen C mit einem Mikrometer eingestellt werden kann, während D leicht an den Körper gepreßt wird vermittels einer Feder E, die über einen Hebel F angreift. Dieser wirkt auf einen zweiten H, der mit einem Spiegel J verbunden ist. Eine geringe Verschiebung von D bewirkt eine Veränderung eines Lichtzeigers, der durch J übertragen wird. Der Apparat gestattet z. B. bei einer Dicke von $^1/_4$ Zoll (6,35 mm) eine Dickenänderung von ca. $^1/_2\ 10^{-6}$ Zoll noch zu messen. (Siehe auch (45), S. 124.)

Die Bestimmung mit Hilfe des Cokerschen Apparates bedeutet gegenüber der Interferenzmethode eine wesentliche Erleichterung. Viele Arbeiten von Coker und seiner Schule sind auch so ausgeführt worden. Es ist aber andererseits erwünscht, zu prüfen, ob man nicht durch rein optische Methoden zu einer völligen Spannungsbestimmung kommen kann; denn das beschriebene Verfahren erfordert die Herstellung eines besonders empfindlichen mechanischen Meßapparates, sowie die Kenntnis der Materialkonstanten, die durch besondere Versuche zu bestimmen bzw. durch Vergleichsmessungen zu eliminieren sind (vgl. z. B. (45), S. 125). Die Frage nach einer völligen Spannungsbestimmung

auf rein optischem Wege ist bereits von Maxwell behandelt und ferner von Coker und Filon ausführlich untersucht worden. Drei verschiedene Verfahren hierfür sollen kurz skizziert werden.

Das erste Verfahren beruht auf der Erkenntnis, daß die Isoklinen zusammen mit den Randbedingungen die Spannungsverteilung völlig bestimmen. Zur praktischen Anwendung dieser Methode ist es erforderlich, die analytische Gleichung der Isoklinen aufzustellen. Das ist aber im allgemeinen nicht möglich bzw. außerordentlich schwierig, so daß dieses Verfahren kaum in Betracht kommt.

Die zweite Methode (Filon und Coker) zeigt, daß bei Kenntnis der Isoklinen und der Isochromaten sowie der Randbedingungen durch graphische Integration σ_x, σ_y, τ erhalten werden kann. Es wird dabei Gebrauch gemacht von den oben genannten Gleichgewichtsbedingungen für ein kleines rechteckiges Element, wonach

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

ist. Hieraus ergibt sich:

$$\sigma_x = -\int \frac{\partial \tau}{\partial y}\, dx + C_1; \quad \sigma_y = -\int \frac{\partial \tau}{\partial x}\, dy + C_2.$$

Hierbei sind die Konstanten C_1 und C_2 die X- bzw. Y-Komponente der Spannungen am Rande, die nach Voraussetzung bekannt sein müssen. Die Größe τ war ferner bereits durch die Gleichung

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\varphi \cos\varphi$$

bestimmt (vgl. S. 510). Die Schwierigkeiten dieses Verfahrens hinsichtlich seiner praktischen Verwendbarkeit besteht vorwiegend darin, daß die Bestimmungen der Größen $\frac{d\tau}{dx}$ und $\frac{d\tau}{dy}$ oft nicht hinreichend genau erfolgen kann, weil die Bestimmungsgleichung für τ die Beobachtung des Winkels φ erfordert, dessen Messung wegen der endlichen Breite der Isoklinen oft unsicher ist.

Filon (38) hat nun vor einigen Jahren eine dritte rein optische Methode entwickelt, die diese Schwierigkeiten zu vermeiden sucht. Das Verfahren, dessen Resultate kurz angegeben werden sollen, geht von zwei Gleichungen, die die Gleichgewichtsbedingungen eines Elementes, das von Hauptspannungslinien begrenzt ist, darstellen, aus und die von Mesnager angegeben worden sind. Es ist:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_1} = 0,$$

wobei r_1 und r_2 die Krümmungsradien der beiden Hauptspannungslinien s_1 und s_2 die Bögen, gemessen auf den Hauptspannungslinien sind. Diese Gleichungen sind wie Filon betont, unabhängig von der Beziehung zwischen Spannung und Deformation, so daß sie die Grundlage eines Verfahrens bilden können, das auch für Körper, die eine Abweichung vom Hookeschen Gesetz zeigen, gilt, während gerade diese Einschränkung für die beschriebene mechanische Bestimmung von $\sigma_1 + \sigma_2$ gemacht werden mußte. Durch Integration von einem Punkt o aus längs den entsprechenden Hauptspannungslinien nach einem Punkte A bzw. B erhält man nun

$$\sigma_1 = \sigma_{1_o} - \int_o^A \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_2}\, ds_1$$

$$\sigma_2 = \sigma_{2_o} - \int_o^B \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_1}\, ds_2,$$

wobei σ_{1_o} und σ_{2_o} die Hauptspannungswerte im Punkte o, die gegeben sein sollen, sind. Nach dem die Größen r und s noch durch Φ und ψ ersetzt werden, folgt als Endresultat:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{1_o} + \int_{\Phi_o}^{\Phi} (\sigma_1 - \sigma_2) \cot\psi\, d\Phi \\ \text{und} \\ \sigma_2 &= \sigma_{2_o} + \int_{\Phi_o}^{\Phi} (\sigma_2 - \sigma_1) \cot\psi_1\, d\Phi, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei Φ den Parameter der Isoklinen, ψ, ψ_1 die Neigungen der Hauptspannungslinien gegen die Isoklinen bedeuten. Für den Fall, daß ψ klein ist, daß also die Isoklinen fast in die gleiche Richtung wie eine Hauptspannungsrichtung fallen, liefert die Formel (1) für σ_1 zu ungenaue Werte, weshalb man dann das Integral der Gleichung auf anderem Wege bestimmt. Es ergibt sich dann:

$$\sigma_1 = \sigma_{1_o} + \Delta\Phi \int_o^A \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\Delta y}\, ds_1, \quad (2)$$

wenn Δy der Abstand zweier benachbarter Isoklinen, gemessen nach der in Fig. 10a eingezeichneten Weise ist. An einem Beispiel, das Filon gegeben hat, soll die praktische Anwendung des Verfahrens gezeigt werden. Der Versuchskörper ist eine Kreisscheibe ($r = 3^1/_4$ inch [82,6 mm]) aus Bakelith, die an zwei diametral gelegenen Punkten mit der Einheit der Spannung belastet wird. Fig. 10b zeigt nur einen Quadranten, woraus aus Symmetriegründen der Verlauf in der ganzen Scheibe erhalten werden kann. Die durch das Experiment gefundenen Isoklinen und Isochromaten sind durch starke und schwächer gezeichnete Linien angegeben. Die römischen Ziffern geben die Ordnung der Iso-

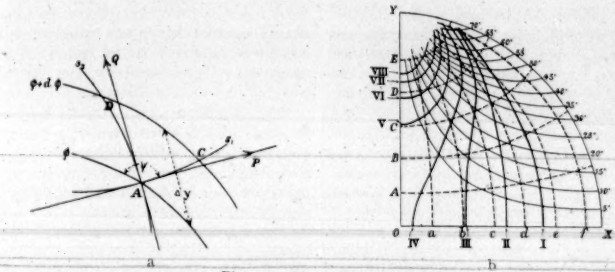


Fig. 10. Nach Filon (38).

chromaten an. Der Rand der Scheibe ist als Isochromate nullter Ordnung zu betrachten. Die Hauptspannungslinien, durch Konstruktion aus den Isoklinen erhalten, sind punktiert gezeichnet.

Der erste Schritt zur Bestimmung der Größen σ_1 und σ_2 besteht in der Ermittlung dieser Werte längs der Strecke OX. In diesem Fall ist die Gleichung (2) zu verwenden, und zwar wird zuerst $\sigma_1 - \sigma_2$ an den Schnittpunkten der 4 Isochromaten mit dem Radius bestimmt und daraus dann die Werte $\sigma_1 - \sigma_1$ längs r im Abstand von $r/10$. Die Werte Δy, die Abstände der Isoklinen $\Phi = 5^0$ und $\Phi = -5^0$, gemessen senkrecht zur x-Achse wurden für die in 10 Teile geteilte x-Achse bestimmt. $\Delta\Phi$ ist somit, da Δy von -5^0 bis $+5^0$ gemessen ist, arc 10^0. Damit können nun die Werte σ_1 und σ_2 durch graphische Integration bestimmt werden. In der ersten Tabelle sind diese in der ersten Spalte von σ_1 und σ_2 zusammengestellt.

Tabelle I nach Filon (38).

x/r	$\sigma_1 - \sigma_2$	Δy (Zoll)	$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\Delta y}$ Arc 10^0	σ_1 exp.	σ_1 theor.	σ_2 exp.	σ_2 theor.
0,0	4,08	∞	0	0,84	1,06	— 3,24	— 3,18
0,1	3,94	3,05	0,226	0,81	1,02	— 3,13	— 3,10
0,2	3,53	2,03	0,304	0,72	0,90	— 2,81	— 2,86
0,3	3,04	1,45	0,366	0,61	0,74	— 2,43	— 2,51
0,4	2,53	1,08	0,409	0,48	0,56	— 2,05	— 2,09
0,5	2,03	0,88	0,403	0,35	0,38	— 1,68	— 1,66
0,6	1,50	0,74	0,354	0,23	0,24	— 1,27	— 1,23
0,7	1,00	0,65	0,269	0,13	0,12	— 0,87	— 0,85
0,8	0,60	0,59	0,178	0,06	0,05	— 0,54	— 0,52
0,9	0,28	0,59	0,083	0,01	0,01	— 0,27	— 0,23
1,0	0	0,60	0	0	0	0	0

Nunmehr erfolgt die Bestimmung von σ_1 und σ_2 längs der Trajektorien A, B, C, D unter Anwendung der Formel (1). σ_1 ist am Rand Null; die Werte sind jetzt für die Schnittpunkte der vier Trajektorien mit den einzelnen Isoklinen bestimmt, siehe Tabelle II. Hiermit ist die Aufgabe, die Hauptspannungen für eine beliebige Anzahl von Punkten der Scheibe

Tabelle II nach Filon (38).

	Φ beob. o	ψ beob. o	$\sigma_1 - \sigma_2$ beob.	$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\cot \psi}$	σ_1	σ_2
A	17,0	—	0,0	0,0	0,0	0,0
	15,0	161,5	0,40	1,20	0,02	— 0,38
	10,0	157,5	1,50	3,62	0,18	— 1,32
	5,0	151,5	2,72	5,00	0,56	— 2,16
	0,0	90,0	4,20	0,0	0,93	— 3,27
B	32,5	—	0,0	0,0	0,0	0,0
	30,0	144,5	0,28	0,39	0,01	— 0,27
	25,0	144,0	0,89	1,23	0,06	— 0,82
	20,0	143,0	1,60	2,13	0,21	— 1,39
	15,0	137,5	2,50	2,72	0,42	— 2,08
	10,0	131,0	3,27	2,84	0,67	— 2,60
	5,0	124,0	3,91	2,62	0,92	— 2,99
	0,0	90,0	4,35	0,0	1,06	— 3,29
C	48,0	—	0,0	0,0	0,0	0,0
	45,0	134,0	0,43	0,42	0,01	— 0,42
	40,0	131,0	0,83	0,72	0,06	— 0,77
	35,0	129,0	1,44	1,17	0,14	— 1,30
	30,0	129,5	2,00	1,64	0,27	— 1,74
	25,0	124,0	2,90	1,94	0,42	— 2,48
	20,0	121,0	3,60	2,16	0,60	— 3,00
	15,0	122,0	4,15	2,57	0,80	— 3,35
	10,0	115,5	4,55	2,18	1,02	— 3,53
	5,0	108,0	4,82	1,54	1,18	— 3,64
	0,0	90,0	4,85	0,0	1,25	— 3,60
D	63,0	—	0,0	0,0	0,0	0,0
	60,0	128,0	0,75	0,58	0,01	— 0,74
	55,0	118,0	1,90	1,01	0,08	— 1,82
	50,0	114,0	2,85	1,27	0,17	— 2,68
	45,0	113,0	3,40	1,44	0,29	— 3,11
	40,0	113,0	3,90	1,65	0,42	— 3,48
	35,0	113,0	4,25	1,80	0,57	— 3,68
	30,0	115,0	4,70	2,19	0,74	— 3,96
	25,0	114,0	5,15	2,29	0,93	— 4,22
	20,0	108,0	5,55	1,80	1,12	— 4,43
	15,0	105,0	5,90	1,58	1,27	— 4,63
	10,0	101,5	6,15	1,25	1,39	— 4,76
	5,0	97,0	6,30	0,77	1,48	— 4,82
	0,0	90,0	6,40	0,0	1,50	— 4,90

anzugeben, gelöst. Es ist mit diesem Beispiel gleichzeitig gezeigt, daß das auf Grund von Messungen auf rein optischem Wege möglich ist. Die in der ersten Tabelle in den Rubriken für σ_1 und σ_2 angegebene zweite Zahlenreihe gibt die Werte an, wie sie sich auf Grund einer theoretischen Berechnung ergeben [vgl. z. B. Love (71), Art. 155]. Die Abweichungen zwischen den theoretisch und experimentell ermittelten Werten führt Filon darauf zurück, daß bei der Ausführung seiner Versuche die Voraussetzungen der Theorie nicht ganz erfüllt werden konnten, insbesondere plattete sich die Scheibe an den Angriffspunkten der Kraft etwas ab, so daß der Druck auf einem ziemlich breiten Bogenstück angriff und nicht, wie die Theorie erfordert, in einem Punkte.

2. Anwendungen auf einfache Belastungsfälle.

a) Reine Normalbeanspruchung. Reine Biegung.

Die Spannungsverhältnisse, die bei der Biegung eines Balkens mit rechtwinkligem Querschnitt auftreten, sind in zahlreichen Arbeiten im polarisierten Licht untersucht worden. Es sind da Untersuchungen von Wilson, Hönigsberg, König, Coker, Mesnager, Aue, Ambronn, Asch, Tuzi zu nennen. Der Zweck der einzelnen Arbeiten war zum Teil recht verschieden; so beschränken sich welche darauf, unter dem Einfluß verschiedener Belastung die neutrale Zone sichtbar zu machen oder nur den Verlauf der Trajektorien zu ermitteln, während andere mehr analysierender Natur sind und die Erforschung der verschiedenen Spannungsanteile zum Gegenstand haben. Auch der Einfluß der Auflager ist in manchen Arbeiten näher studiert worden.

Im allgemeinen wirken bei einer Biegung z. B. bei einem einseitig eingemauertem Balken, der am freien Ende belastet ist, auf den Querschnitt sowohl Normalspannungen (Zug oder Druck) und Schubspannungen. Das Bild zwischen gekreuzten Nicols ist dann eine Resultierende aus beiden Wirkungen. Da nun aber gerade die Größe und das Zusammenwirken der beiden Spannungsarten von Interesse ist, so muß man nach Versuchsbedingungen suchen, die eine getrennte Beobachtung gestatten. Für das Studium der Normalkräfte, das rein an einem gleichförmig gedehnten Stab erfolgen kann, liefert die reine Biegung eine Möglichkeit, gleichzeitig verschiedene Dehnungsstufen zu prüfen. Das Studium der Wirkung von Scherkräften kann bei der Biegung nur an bestimmten ausgezeichneten Stellen des Stabes, in denen diese Kräfte rein auftreten, erfolgen. Es kann aber in einem besonderen Versuch reine Scherung untersucht werden und die dabei gewonnenen Erkenntnisse dann beim Studium des Einflusses der Schubkräfte bei der Biegung verwandt werden.

Der Fall der reinen, d. h. der scherungsfreien Biegung wird bekanntlich dadurch erreicht, daß man über zwei parallele Schneiden, die senkrecht zur Stabkante angeordnet sind, biegt. Das innerhalb der beiden Auflager gelegene Stück des Stabes zeigt dann in einiger Entfernung von den Auflagestellen reine Biegung, die Krümmungslinie ist also kreisförmig. Der Spannungszustand ist in diesem Teil des Stabes in der ganzen Länge der gleiche, das Biegungsmoment ist konstant. Es treten nur die durch die Krümmung bedingten Zug- und Druckspannungen auf, die parallel zu den Kanten des Stabes verlaufen. Vertikalspannungen sind nicht vorhanden. Die neutrale Faser, die das Zug- und Druckgebiet voneinander trennt, verläuft genau in der Mitte zwischen den beiden Kanten. Diese Feststellungen finden in dem optischen Befund ihre Bestätigung. Der Streifen zeigt zwischen gekreuzten Nicols im weißen Licht in der Diagonalstellung ein System von parallel zur Kante verlaufenden Interferenzstreifen, die genau symmetrisch zu einem schwarzen Streifen in der Mitte angeordnet sind. Bei geringerer Beanspruchung und bei einem Körper mit kleinerer spezifischer Doppelbrechung verschwinden die Streifen und es ist nur noch eine auf beiden Seiten der neutralen Faser gleichmäßige Aufhellung zu erkennen. Der Abstand der Streifen ist bei jeder Lage zu den Nicols der gleiche, nur die Intensität nimmt beim Herausdrehen aus der Diagonalstellung ab. Fällt der Streifen in eine der beiden Polarisationsrichtungen, dann erscheint er völlig dunkel. Dieses Ergebnis bestätigt die Tatsache, daß die Hauptspannungen überall die gleiche Richtung haben, und zwar parallel zur Stabkante verlaufen. Voraussetzung für einwandfreie optische Versuchsergebnisse ist, daß die Auflager sorgfältig abgeglichen sein müssen. Ist das nicht völlig der Fall, so treten schwache Scherkräfte auf, die sich dadurch bemerkbar machen, daß das Gesichtsfeld nicht völlig dunkel zu erhalten ist. Vgl. z. B. König (61), S. 844.

Bei der reinen Biegung fallen die Isochromaten und die Trajektorien also in dieselbe Richtung, in der auch die Isoklinen, die zu einem breiten, die ganze Fläche des Stabes ausfüllendem Band zusammengefallen sind, verlaufen.

Die Verteilung der Zug- und Druckspannungen über einen Querschnitt ist linear. Das erkennt man qualitativ sofort an dem Verlauf des Nullstreifens eines Kompensators, der, wenn

er beim unbelasteten Balken senkrecht zur Stabachse über die Breite des Stabes verläuft, nach der Belastung unter einem bestimmten Winkel zur Achse sich einstellt, ohne die ursprünglich gerade Form zu ändern. Quantitativ hat Asch (9) an einem Zelluloidstreifen den Spannungsverlauf bei reiner Biegung, ermittelt. Fig. 11 gibt als gestrichelte Linie den theoretisch geforderten Spannungsverlauf an, während die ausgezogene Linie die experimentell gefundenen Werte zeigt. Die im Zuggebiet auftretenden merklichen Abweichungen, die bei mehreren Versuchen sich ergaben, haben nach Asch vermutlich ihren Grund in der Tatsache, daß bei diesen Spannungen und der verwandten Zelluloidsorte infolge der Eigenschaften des Zelluloids Unregelmäßigkeiten vorkommen können.

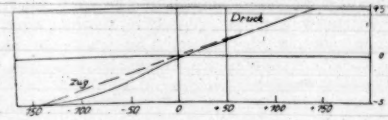


Fig. 11. Nach Asch (9).

b) Reine Scherung.

Mit den optischen Erscheinungen im Fall reiner Scherung befaßt sich eine Arbeit von König (62) und eine von Coker (22). Das Ziel, unter dem diese beiden Arbeiten unternommen sind, ist aber bei jeder ein ganz verschiedenes. Die Untersuchungen von König waren durch seine früheren Beobachtungen an gebogenen und schwingenden Glasplatten über das z. T. recht komplizierte Zusammenwirken von Zug- bzw. Druckspannungen und Schubspannungen veranlaßt und bezweckten das Studium der jeder der beiden Spannungsarten zugeordneten Doppelbrechungs-Erscheinungen an einfachen Versuchsverhältnissen. Die Arbeit von Coker dagegen war durch ein rein technisches Problem, die Kräfteverteilung in Dämmen, veranlaßt und untersucht an einer einfachen Anordnung den Spannungsverlauf einer Platte bei reiner Schubbeanspruchung.

König machte seine Untersuchung an Blöcken einer besonders präparierten erstarrten Gelatinelösung. Ein Klotz von parallelepipedischer Gestalt war mit einer Fläche auf einer horizontalen Unterlage festgekittet, während die gegenüberliegende Fläche an einen horizontal verschiebbaren Schlitten mit Meßvorrichtung gekittet war. Die Beobachtung erfolgte zwischen gekreuzten Nicols in einer zur Schiebungsebene senkrechten Richtung. Bei einer Schlittenverschiebung konnte nun in den mittleren Teilen des Blockes reine Schubbeanspruchung erzielt werden, die auftretende Doppelbrechung hat somit eine Achsenrichtung von 45^0 zur Schiebungsrichtung. Wird nun mit A der Abstand zweier paralleler horizontaler Striche, mit S die gemessene Verschiebung bezeichnet, so gibt $S/A = s$ die Größe der Schiebung an. Auf Grund des Neumannschen Ansatzes läßt sich nun für die beobachtete Gangdifferenz Δ_s als Funktion der Schiebung s folgende Beziehung entwickeln:

$$\Delta_s = \frac{D_s N^2}{\lambda_0 v_0}(p - q)s,$$

darin bedeutet D_s die Dicke der Platte in Richtung des Lichtstrahls, N den Brechungsexponenten der Gelatine, λ_0, v_0 die Wellenlänge und die Geschwindigkeit des Beobachtungslichtes bezogen auf das Vakuum, $p - q$ eine Körperkonstante (vgl. S. 499). Wird nun mit G_0 das Verhältnis von Δs zur Schiebungsgröße s bezeichnet und mit G die spezifische Doppelbrechung, so ergibt sich, da aus reinen Dehnungsversuchen die Beziehung

$$G = \frac{N^2}{v_0}(p - q)(1 + \mu)$$

hergeleitet werden konnte, der Zusammenhang $G = G_0(1 + \mu)$, worin μ das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdilatation $\left(\text{S. } 506\ \frac{1}{m}\right)$ ist. Diese Gleichung konnte durch Versuche befriedigend bestätigt werden. Eine Möglichkeit für eine neue Bestimmungsmethode der Größe μ aus Doppelbrechungsbeobachtungen für reine Dehnung und reine Schiebung wird noch erwähnt.

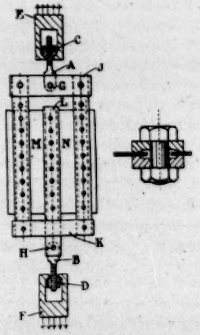
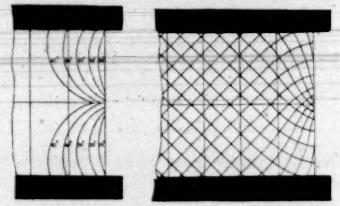


Fig. 12. Nach Coker (22).

Die Versuchsanordnung von Coker, die er zur Scherung benutzte, zeigt Fig. 12. In einem Stahlrahmen wird eine Zelluloidplatte an ihrer linken und rechten Seite in der Weise eingespannt,

daß sie am Rande mit je einer Reihe Löcher versehen wird und zwischen den doppelten senkrechten Schienen des Rahmens mit Bolzen befestigt ist. Die Einspannung muß sehr sorgfältig und gleichmäßig erfolgen. Die Figur zeigt auch ein Einspannbolzenpaar im Querschnitt. Die Mitte der Platte wird gleichfalls mit einer doppelten Schiene versehen, die aber frei durch den unteren Querbalken des Rahmens hindurchgeht. Wenn nun bei E und F Kräfte angreifen, dadurch, daß der Rahmen in einer Dehnungsmaschine angebracht wird, so werden die Teile M und N der Platte in gleicher Weise einer reinen Scherung, wenigstens in den mittleren Teilen unterworfen. Die aufgenommenen Isoklinen zeigt Fig. 13a, die daraus konstruierten Trajektorien gibt Fig. 13b für einen der beiden Teile



a b

Fig. 13. Nach Coker (22).

M oder N wieder. Die Figur läßt den für die Scherung charakteristischen Verlauf der Hauptspannungsrichtungen (45^0 gegen die Mittellinie) deutlich erkennen. Eine Abweichung davon durch den Einfluß der freien Kanten ist nur in der Nähe der Enden bemerkbar, und zwar konnte Coker die Entfernung von der Endkante, bei der eine Abweichung erkennbar wird, als angenähert proportional der Breite des Streifens beobachten.

Die Bestimmung der Größe der Spannungen erfolgte mit Hilfe eines Zelluloidkompensators, der direkt in einem Kraftmaß (lbs/square inch) geeicht war.

In der Elastizitätstheorie wird für die Verteilung der Schubspannung über dem Querschnitt eines gebogenen Balkens ein parabolisches Gesetz abgeleitet, z. B. für einen einseitig eingemauerten Balken:

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{w}{bh}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

hierbei bedeutet h die Höhe, b die Dicke des Balkens und w das am freien Ende angreifende Gewicht. Diese parabolische Verteilung der Schubspannung über den Querschnitt gilt praktisch in den Fällen, wo die Länge des Balkens groß im Vergleich zu seinen Querdimensionen angenommen werden kann. Wenn aber, wie bei den obigen Versuchsbedingungen die Platte eine kleine Entfernung der beiden Begrenzungsquerschnitte, die gegeneinander verschoben werden, gegenüber der Ausdehnung in der Verschiebungsrichtung hat und ferner die wirksamen äußeren Kräfte möglichst gleichmäßig längs der ganzen Verschiebungslinie angreifen (die Versuchsbedingungen, die bei Dämmen vorliegen, sind ähnliche), so ist abgesehen vom Einfluß der Enden ein im wesentlichen gleichmäßiger Verlauf der Schubspannung über die ganze Schiebungsrichtung zu erwarten. Eine in dieser Richtung liegende theoretische Untersuchung von Andrade (7) konnte den Verlauf der Scherungs-

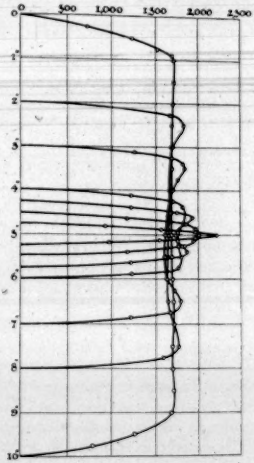


Fig. 14. Nach Coker (22).

spannung analytisch darstellen, wobei sich als wesentliches Resultat zeigte, daß dieselbe an den Enden der Platte maximale Werte annahm und längs des mittleren Teiles einige Maxima und Minima von geringer Bedeutung hatte (vgl. Coker (22), S. 302).

Fig. 14 zeigt den Verlauf der Schubspannung, wie er sich aus den Beobachtungen von Coker an einem Streifen, dessen freie Breite $^1/_2$ Zoll (12,7 mm), dessen Dicke 0,18 Zoll (4,58 mm) war, ergab. Als Abszisse ist die Spannung in lbs/square inch, wie sie am Kompensator abgelesen wurde, als Ordinate die Länge des Streifens aufgetragen[1]). Die verschiedenen Kurven entsprechen den verschiedenen Plattenlängen, die untersucht wurden.

1) 1 lbs/square inch = 0,0696 kg/cm².

Bis auf die beiden mittleren Kurven läßt der Verlauf erkennen, daß die Schubspannung am Ende schnell wächst und dann über die ganze Länge im wesentlichen denselben Wert behält. Wenn die Länge so weit vermindert wurde, daß sie nur noch gleich der doppelten Breite des Streifens war, wurde eine prinzipielle andere Spannungsverteilung gemessen, insofern, als jetzt in der Mitte ein Maximum erreicht wird. Bei gleicher Länge und Breite ergibt sich ein fast streng parabolischer Verlauf. (Über einen speziellen Fall von Torsion, der sich auch als zweidimensionales Problem behandeln läßt, siehe Balinkin (11).)

c) Allgemeine ebene Biegung.

Nachdem die optischen Wirkungen der beiden Grundarten von Spannungszuständen unter einfachen Versuchsbedingungen gesondert beobachtet werden konnten, kann ihr Zusammenwirken bei der allgemeinen ebenen Biegung eines Stabes studiert werden.

Mit Hilfe der beschriebenen Methoden lassen sich für jeden Punkt des gebogenen Stabes die einzelnen Spannungskomponenten aus den resultierenden Doppelbrechungserscheinungen berechnen und ein Teil der Arbeiten befaßt sich auch mit solchen Untersuchungen. Es gelingt aber auch, Versuchsbedingungen zu schaffen, die die Wirkungen der beiden Spannungsanteile bereits in ihren Doppelbrechungserscheinungen getrennt zu beobachten, gestatten. Während die den Zug- und Druckspannungen zugeordneten Doppelbrechungserscheinungen bereits seit Brewster (18) bekannt sind, ist die in ihrer Wirkung wesentlich schwächere von den Schubkräften herrührende Doppelbrechung erst von König (61) bei der Biegung rein beobachtet worden.

Veranlaßt wurden diese Untersuchungen an statisch gebogenen Glasstreifen durch vorangehende Arbeiten über die Doppelbrechungserscheinungen an transversalschwingenden Glasplatten (60). Bei diesen Versuchen ist eine solche getrennte Beobachtung auch möglich. Eine lange Glasplatte, die so zu Transversalschwingungen angeregt wurde, daß längs der Platte sich 4 Knoten ausbildeten, war in den beiden äußeren Knoten unterstützt und in geeigneter Weise wagerecht aufgestellt. Die Beobachtung in einem Schwingungsknoten wurde in einem der beiden mittleren völlig frei schwingenden vorgenommen. Im polarisierten Licht zeigt sich, daß die Platte doppelbrechend ist, und zwar ist die Doppelbrechung in den verschiedenen Teilen verschiedener Natur. Eine Art tritt rein im Schwingungsbauch, die andere im Schwingungsknoten auf, während an allen anderen Stellen sich beide Arten überlagern.

Die im Schwingungsbauch beobachtete Erscheinung entspricht der Doppelbrechung einer Glasplatte bei reiner Biegung. Die Achsen der Doppelbrechung sind parallel und senkrecht zu den Kanten der Platte gerichtet, so daß also die stärkste Aufhellung bei Stellung der Platte unter 45^0 zu den Polarisationsebenen der Nicols auftritt. Die Mittellinie ist neutral, die Gangdifferenz nimmt proportional mit der Entfernung von der Mittellinie zu. Das Vorzeichen der Doppelbrechung ist in der oberen Hälfte der Platte positiv, wenn sie nach oben schwingt und negativ, wenn sie nach unten schwingt. Als Gleichung für die Isochromaten, die mit Hilfe eines Fallpendels analysiert und photographisch registriert sind, ergibt sich: $y = \frac{\Delta}{D \sin x} + a \sin x$, wobei a und D für eine gegebene Schwingung Konstanten sind. Es läßt sich hieraus auch eine Methode zur Bestimmung der spezifischen Doppelbrechung des Glases herleiten.

In einem Schwingungsknoten dagegen ergibt die Doppelbrechung ein ganz anderes Bild. Es zeigt sich zwischen gekreuzten Nicols eine über die ganze Dicke der Platte ziemlich gleichmäßige Aufhellung, die nach den Rändern hin in ihrer Intensität etwas abnimmt. Diese Aufhellung ist am stärksten, wenn die Polarisationsebenen parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte orientiert sind. Die Achsen der Doppelbrechung sind also jetzt unter 45^0 zur Längsrichtung geneigt. Der Betrag der Doppelbrechung ist gering, es zeigt sich bei stärkster Schwingung höchstens ein Weiß erster Ordnung, während im Schwingungsbauch Brewstersche Streifen auftraten. Die Doppelbrechung im Knoten wird während der Schwingung gleichzeitig mit der im Bauch Null und erreicht auch mit dieser ihr Maximum. Die in dem Bauch auftretende Doppelbrechung hat ihren Grund in den dort durch die Verbiegung entstehenden Zug- und Druckkräften, die in dem Knoten dagegen wird durch scherende Kräfte erzeugt. Das Verhältnis der Größe der Doppelbrechung in Knoten und Bauch ergibt sich in ziemlich guter Übereinstimmung mit einem theoretisch errechneten Wert, zu dem man unter Zugrundelegung der von Saint-Venant für die scherenden Kräfte bei statischer Deformation entwickelte Theorie gelangt. Auch die qualitativ festgestellte Abnahme der Doppelbrechung im Knoten nach den Rändern zu, würde damit im Einklang stehen. Die an einer zwischen Knoten und Bauch liegenden Stelle der Platte auftretenden Erscheinungen resultieren als Überlagerung der beiden verschiedenen Grundarten.

Einem eingehenderen Studium waren diese beiden Doppelbrechungsarten bei statisch ge-

bogenen Glasplatten zugänglich (König (61)). Wird eine Glasplatte nach dem in Fig. 15 angegebenen Schema belastet, so wird sie an den Stellen 2 und 4 nach unten, an den Stellen 1, 3, 5 nach oben gedrückt. Zwischen 2 und 3 und zwischen 3 und 4 hat die Platte also je einen Wendepunkt.

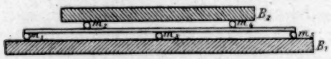
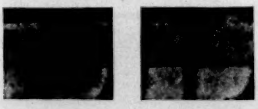


Fig. 15. Nach König (61).

In diesen Punkten ist die Krümmung Null. Im polarisierten Licht sind keine Interferenzstreifen an diesen Stellen zu beobachten, da die Normalspannungen verschwinden und nur reine Schubspannungen auftreten. Die Doppelbrechungserscheinungen, die eine solche Stelle zeigt, ist also derselben Art wie in den Knotenpunkten der schwingenden Platte. In der Diagonalstellung erscheint die Platte dunkel unter der Voraussetzung, daß es sich um eine aus gut gekühltem Glas hergestellte Platte handelt, sonst treten die auf S. 504 beschriebenen Doppelbrechungserscheinungen hier auf. Bei paralleler Richtung der Platte mit einer der Polarisationsebenen zeigen die Wendepunkte Aufhellung mit nach dem Rande abnehmender Intensität. Der Verlauf der Schubspannung über dem Querschnitt läßt sich qualitativ in ähnlicher Weise direkt sichtbar



a b

Nach König (61).

c

Nach Asch (9).

Fig. 16.

machen wie das für die Normalspannungen auf S. 514 erwähnt wurde. Fig. 16a zeigt einen Kompensator Nullstreifen, über die ungebogene Platte Fig. 16b denselben nach der Biegung im Wendepunkt.

Fig. 16c zeigt auf Grund der Messungen von Asch (9) an einem gebogenen Zelluloidstreifen den Verlauf der Schubspannungen über den Querschnitt (ausgezogen), die punktierte Linie gibt die theoretisch geforderte Kurve. Bezüglich der Differenzen ist vielleicht auch hierfür das Verhalten des Zelluloids maßgebend (vgl. S. 515).

Die optische Wirkung der Scherkraft bei der allgemeinen ebenen Biegung rein zu beobachten, ist außer in den Wendepunkten auch noch in der neutralen Faser möglich, in der doch auch bei der allgemeinen Biegung keine Normalspannungen auftreten. Bei paralleler Orientierung von Glasplatte und Polarisationsebene erscheint daher nicht wie im Fall der reinen Biegung der Streifen völlig dunkel, sondern es erstreckt sich jetzt vom Wendepunkt aus, wo die Platte in ihrer ganzen Breite erhellt ist, nach beiden Seiten in der neutralen Faser bis zu dem Auflager hin, eine Aufhellung. Fig. 17b zeigt in einer photographischen Aufnahme diese Erscheinungen, während Fig. 17a denselben Teil der Platte in dre

a b c

Fig. 17. Nach König (61).

Diagonalstellung zeigt. Wenn an einem Auflager reine (scherungsfreie) und gewöhnliche Biegung zusammenstoßen, so kann man direkt beobachten, wie die Gebiete, in denen Scherung vorhanden ist (links), aufgehellt sind und in den scherungsfreien Teil (rechts) am Auflager übergehen, Fig. 17c. Aus den Beobachtungen läßt sich ferner feststellen, daß die von der Scherung herrührende Doppelbrechung über die ganze Länge der neutralen Faser konstant ist, was im Einklang mit der Theorie der Biegung steht.

An einer beliebigen Stelle (es werden jetzt nur Fälle betrachtet, die nicht in der unmittelbaren Nähe der Auflager liegen) eines nicht kreisförmig gebogenen Stabes ist die auftretende Spannung eine Resultierende aus den Normal- und Tangentialspannungen. Ausnahmestellen, wo nur eine der beiden Spannungsarten auftritt, sind außer den besprochenen nur die obere und die untere Kante des Stabes, in denen nur Längsspannungen wirksam sind.

Die Richtung der Hauptspannungen ergibt sich folgendermaßen. Aus den Gleichungen auf Seite 510 folgt zunächst noch ganz allgemein für jeden ebenen Spannungszustand:

$$\sigma_x - \sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\varphi$$

und

$$2\tau = (\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\varphi,$$

daraus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

als Gleichung für die Hauptspannungsrichtungen und für die Werte der Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}.$$

Für den Fall des ebenen gebogenen Balkens, der mit seiner Längsachse in der X-Achse orientiert ist, wird $\sigma_y = 0$ und σ_x und τ erhalten, wie in der Theorie der Biegung gezeigt wird, folgende Werte:

$$\sigma_y = E \cdot y \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{ED^2}{12}\frac{dy^2}{dx^2}\left(1 - \frac{4y^2}{D^2}\right),$$

woraus sich für den Fall einer Biegung mit Wendepunkt ergibt

$$\sigma = \frac{-3aE}{x_0^3} xy$$

$$\tau = -\frac{3}{8}\frac{aED^2}{x_0^3}\left(1 - \frac{4y^2}{D^2}\right),$$

wobei a die Verbiegung im Auflager, x_0 die Entfernung des Wendepunktes vom Auflager, D die Dicke der Platte bedeutet. Setzt man diese Werte in die Gleichung für die Hauptspannungsrichtungen ein, so erhält man:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D^2}{4xy}\left(1 - \frac{4y^2}{D^2}\right) \qquad (1)$$

oder auch

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D}{2x\eta}(1 - \eta^2), \qquad (2)$$

wenn $\eta = y : \frac{D}{2}$ gesetzt ist. Die letzte Gleichung zeigt, daß die Hauptspannungsrichtung überall unabhängig von der Größe der Verbiegung ist. Bei der schwingenden Platte konnten sie deshalb auch während der Schwingung immer an der gleichen Stelle beobachtet werden. Ferner zeigt sie, daß für einen Wendepunkt ($x = 0$) und in der neutralen Faser ($\eta = 0$) $\varphi = 45^0$ ist. Neben der Bestätigung dieser Achsengleichung für die genannten Spezialfälle zeigt sie auch im allgemeinen gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

Betrachtet man in Gleichung (1), $\operatorname{tg} 2\varphi$ als Parameter, dem man nacheinander bestimmte φ-Werte gibt, so stellt die Gleichung die Isoklinenschar dar. Man erkennt, daß die Isoklinen Hyperbeln sind, deren Asymptoten durch die Gleichungen

$$y = 0 \text{ und } y + x \operatorname{tg} 2\varphi = 0$$

bestimmt sind. Die Hyperbeln gehen alle durch die Punkte $y = \pm\frac{D}{2}$ und $x = x_0$. Einen quantitativen Vergleich der Beobachtung und der Rechnung hat Filon (37) an einem Glasbalken aus gutgekühltem, praktisch spannungsfreiem Glas vorgenommen. Er fand eine befriedigende Übereinstimmung. Bereits qualitativ sieht man eine gute Übereinstimmung, aus der in Fig. 18 nach Filon gegebenen Gegenüberstellung von

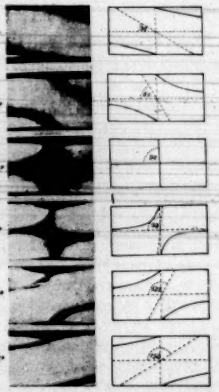
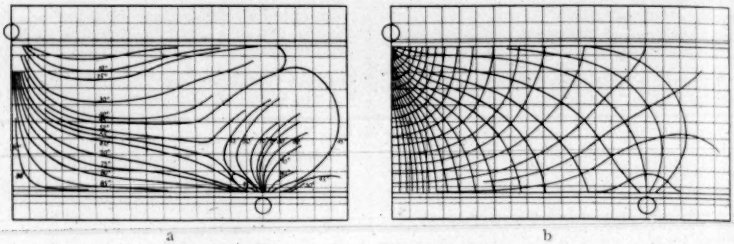


Fig. 18. Nach Filon (37).

6 photographisch ermittelten Isoklinen mit den zugehörigen auf Grund der Rechnung konstruierten Hyperbeln.

König (61) hat für die Gleichung (2) dadurch eine Kontrolle vorgenommen, daß er für einen bestimmten Schnitt senkrecht zur neutralen Achse also für x-const den Verlauf von φ als Funktion von η bestimmt hat. Dieser Zusammenhang ist merklich verschieden, je nachdem in welcher Entfernung vom Wendepunkt der betrachtete Schnitt liegt. Bei starker Krümmung, also bei einem größeren Abstand vom Wendepunkt sind die Abweichungen gegenüber dem Verlauf bei reiner Biegung nur noch in den Zentralpartien vorhanden. Um eine genaue quantitative Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu erzielen, mußte König ein Korrektionsverfahren, durch das er der bei seinen Versuchen vorhandenen natürlichen Doppelbrechung der Glasplatte Rechnung trug, anwenden. Eine ähnliche Prüfung für einen bestimmten Schnitt nahm auch Asch (9) für seinen gebogenen Zelluloidbalken vor.

Einen vollständigen Überblick über den Spannungsverlauf eines auf zwei Stützen ruhen-



a b

Fig. 19. Nach Wilson (101).

den, zentralbelasteten Glasbalkens hat C. Wilson (101) durch Aufnahme der Isoklinen und der daraus konstruierten Trajektorien gegeben (Fig. 19a und 19b). Die allgemeinen Verhältnisse hat er nicht weiter diskutiert, wohl aber hat er spezielle Studien über den Spannungsverlauf in einem durch den Lastangriffspunkt gehenden Querschnitt ausgeführt. Seine Resultate stehen in guter Übereinstimmung mit den hierfür von Flammant aufgestellten Rechnungen.

Die Versuche von Wilson sind später von Filon (37) unter erweiterten Gesichtspunkten fortgesetzt worden, insbesondere hat er auch theoretisch und experimentell den Einfluß der Auflager auf den allgemeinen Spannungsverlauf ausführlich behandelt und eine gute Brauchbarkeit seiner für diesen Einfluß aufgestellten Theorie gefunden.

Gleichfalls unter Berücksichtigung der Auflagereinflüsse und unter Hinzuziehung der exakten Lösung des Problems für den gebogenen Balken, die seine Begrenzungen beachtet, hat Asch einen Zelluloidbalken bei reiner und bei allgemeiner Biegung untersucht. Er liefert nicht nur den Trajektorienverlauf (Fig. 20), sondern

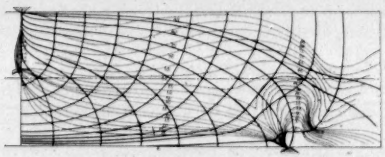


Fig. 20. Nach Asch (9).

gibt auch eine völlige Ausmessung der Spannungskomponenten längs bestimmter Querschnitte. Die Abweichung, die er an gewissen Stellen zwischen den theoretischen und gemessenen Werten findet, wurde bereits kurz erwähnt, und die Möglichkeit einer Ursache von Asch angegeben. Die nach der Theorie geforderten 5 singulären Punkte, in denen sich die Isoklinen schneiden (je einen an den drei Auflagern und zwei weitere in der Symmetrielinie der Belastung) konnten beobachtet und ihre Lagen in befriedigender Übereinstimmung mit den aus der Theorie gefolgerten Stellen gebracht werden.

Die ersten photographischen Aufnahmen im polarisierten Licht von verschiedenartigen Beanspruchungsfällen sind m. W. von Hönigsberg (52) gebracht worden, der auch eine einfache Methode zur Konstruktion von Trajektorien angegeben hat.

Mesnager (74) hat im Zusammenhang mit seinen Arbeiten über die in allen Einzelheiten ausgeführte Spannungsbestimmung für eine Brücke auch den Fall eines gebogenen beiderseitig eingeklemmten Balkens untersucht.

d) Spezieller Biegungsfall nach F. Neumann.

Einen besonderen Fall der Biegung eines geraden Stabes, bei der drei neutrale Fasern entstehen, hat F. Neumann (75) beschrieben und gleichfalls dafür die im polarisierten Licht zu erwartenden Erscheinungen angeführt. Er sagt (S. 468): „Wenn z. B. ein gradliniger Stab über eine gewisse Grenze hinaus gekrümmt wird, so kehrt er nach Aufhebung der krümmenden Kraft nicht vollständig zur geradlinigen Gestalt zurück; er hat eine bleibende Krümmung erlitten. Einige seiner Teile haben in der vorübergehenden Krümmung die Grenze der Elastizität überschritten; die Wirkung dieser Teile teils aufeinander, teils auf diejenigen, welche ihre Grenze der Elastizität noch nicht überschritten haben, bestimmt die Größe der bleibenden Krümmung. Könnte man die ersten Teile, welche permanente Dilatationen erlitten haben, von den letzteren, welche solche nicht erlitten haben, trennen, so würden diese letzteren zu der ursprünglichen gradlinigen Lage wieder zurückkehren. Im polarisierten Lichte würde ein permanent gekrümmter Stab ein System bleibender Farben zeigen, welches sehr verschieden ist von demjenigen, welches aus der vorübergehenden Krümmung entsteht. Auf jeder Seite der Mittelebene des Stabes würde man ein doppeltes System Farben

beobachten, ein positives und ein negatives, die durch eine neutrale Zone getrennt sind. Hier würden also drei neutrale Zonen vorhanden sein, während bei der vorübergehenden Krümmung nur eine solche Zone da ist."

Die beiden äußeren neutralen Zonen sind natürlich nicht wie die mittlere undeformiert. Ihre optische Nullwirkung kommt vielmehr nur daher, weil sich in diesen Bezirken die Zug- und Druckspannungen kompensieren. Eine experimentelle Bestätigung des von ihm vorhergesagten Verhaltens, konnte Neumann selbst nicht geben, da Glas, mit dem er seine Versuche ausführte, eine Überschreitung der Elastizitätsgrenze nicht zuläßt. Dieser Versuch gelingt aber, wie H. Ambronn (2) zeigen konnte, gut an einem Streifen aus völlig ausgetrockneter Gelatine. Zwischen gekreuzten Nicols zeigt sich auch das von Neumann vorhergesagte Resultat. Fig. 21a gibt die von Ambronn angegebene Skizze nach seinen Beobachtungen. Die Achsenrichtung der einzelnen Partien hat er durch Einzeichnen der Indexellipse markiert. Die Ausführung des Versuches wird auch mit einem Streifen aus einem anderen Material als ausgetrockneter Gelatine gelingen. Wird aber ein Zelluloidstreifen gewählt, so kann man mit diesem auch das Auftreten von drei neutralen Fasern demonstrieren. Diese haben aber, abgesehen von der mittleren, eine ganz andere Ursache und sind lediglich durch die optisch-anomalen Eigenschaften des Zelluloids bedingt. Sie entsprechen nämlich denjenigen Deformationsstufen, bei denen das Zelluloid gerade seinen optischen Charakter umkehrt. (Vgl. Fig. 6a und 7.) Sie sind also nur als optisch neutrale Zonen zu betrachten. Im monochromatischen Licht lassen sich diese Erscheinungen von den von Neumann vorausgesagten und von Ambronn an der Gelatine demonstrierten nicht unterscheiden, im weißen Licht dagegen ist das infolge der bereits erwähnten anomalen Dispersion des Zelluloids leicht möglich. Fig. 21b stellt den Doppelbrechungsverlauf am Zelluloid für drei Wellenlängen schematisch nach Ambronn (4) dar und läßt die starke Dispersion in den stark gedehnten Zonen deutlich erkennen.

Wenn auch eine so starke Deformation bei der Prüfung von technischen Spannungszuständen kaum vorkommen dürfte, so sollte doch an diesem Beispiel noch einmal deutlich gemacht werden, zu welchen Fehlschlüssen in der Spannungsbeurteilung man bei extremen Beanspruchungen geführt werden kann, wenn man zu den Modellen ein Material mit optischen so anomalen Eigenschaften, wie sie das von Ambronn und dem Verfasser untersuchte Zelluloid besitzt, benutzt. Erwähnt sei noch, daß Aue (10)

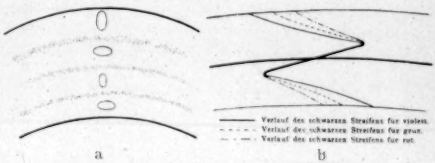


Fig. 21. Nach Ambronn (2 und 4).

im Verlauf seiner Vorversuche das Auftreten mehrerer neutraler Fasern am Zelluloid verifiziert hat und daß auch er seine Resultate falsch deutete. Damals waren aber die optischen Eigenschaften des Zelluloids noch nicht bekannt, ihre Erforschung durch Ambronn wurde vielmehr erst durch verschiedene, bei den Versuchen Aues beobachtete Merkwürdigkeiten im optischen Verhalten veranlaßt. Die eigentlichen Resultate von Aue werden aber dadurch in keiner Weise beeinträchtigt, da er seine messenden Versuche sämtlich an Glas ausgeführt hat.

e) Biegung gekrümmter Stäbe.

Während für die Biegung eines geraden Stabes im wesentlichen eine einheitliche Theorie besteht und die optische Methode eine Bestätigung geliefert hat, liegen bei Stäben die bereits vor der Belastung eine gekrümmte Mittellinie haben, die Verhältnisse wesentlich anders. Hier bestehen zwei Möglichkeiten zur Berechnung, von denen jede auf Voraussetzungen beruht, die zunächst als Festsetzungen hingenommen werden müssen und einer unmittelbaren Prüfung nicht zugänglich sind. Die eine Theorie nimmt an, daß während der Biegung über den Querschnitt eine geradlinige Spannungsverteilung besteht, während die andere ein Ebenbleiben des Querschnitts annimmt. Bei einem geraden Stab sind diese beiden Annahmen bekanntlich gleichzeitig erfüllt.

Wegen der bereits erwähnten Nachteile kommen gewöhnliche Festigkeits- und Bruchversuche für eine Entscheidung zwischen den beiden Theorien nicht in Betracht, wohl aber ist von Aue (10) mit Hilfe der polarisationsoptischen Methode eine solche zu treffen versucht worden.

Da eine Grundvoraussetzung beider Theorien ist, daß das Material isotrop und frei von inneren Spannungen ist, so verwandte Aue für seine Modelle durch eingehende Vorversuche sorgfältig ausgewählte gutgekühlte Gläser. Untersucht wurden zunächst zwei gekröpfte Stäbe verschiedener Krümmung, die auf reine Biegung beansprucht wurden (Fig. 22.) Die Berechnung wurde nach den verschiedenen Methoden ausgeführt und als Vergleichswerte die Kantenspannungen errechnet, die mit den experimentell

Modell 1, $r = 20$ mm

Werte nach der Theorie von Föppl	Bach	Pfleiderer	Exakte Theorie mit Hilfe d. Spannungsfunktion	Experimentell gefundene Werte
1 : 1	1 : 1,62	1 : 1,94	1 : 1,99	1 : 2

Modell 2, $r = 12$ mm

1 : 1	1 : 5,11	1 : 4,21	1 : 3,99	1 : 4

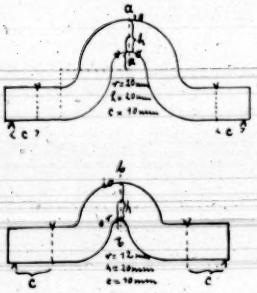


Fig. 22. Nach Aue (10).

gefundenen Werten in der obigen Tabelle zusammengestellt sind.

An zwei U-förmigen Balken wurde ferner ein dem obigen ana'oges Ergebnis erzielt. Einer weiteren Prüfung wurden zwei kreisförmige Glasringe (Ring 1, $r_i = 10$ mm, $r_a = 20$ mm; Ring 2 $r_i = 20$ mm, $r_a = 30$ mm) unterzogen.

Die Tabelle enthält wieder die nach den verschiedenen Theorien ermittelte und die experimentell bestimmte Kantenspannung als Vergleich.

Ring 1

Föppl	Bach	Pfleiderer	Experim. ermitt.
1 : 1,805	1 : 3,004	1 : 2,94	1 : 2,76

Ring 2

1 : 2,35	1 : 5,76	1 : 6,83	1 : 6,4

Zusammenfassend stellt Aue fest: „Unsere Versuche haben also ergeben, daß wir an der Bachschen Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte festhalten können, besonders dann, wenn es sich um stark gekrümmte Stäbe handelt, wobei die Föpplsche Theorie entschieden zu großer Unterschätzung in der Festigkeit führt."

f) Kreisscheiben mit verschiedener Randbelastung.

Bereits in einem vorangehenden Abschnitt wurde bei den Methoden der Spannungsbestimmung aus Isochromaten und Isoklinen der Fall einer kreisförmigen Platte, die an den Enden eines Durchmessers von zwei Druckkräften beansprucht wird, erwähnt. Es soll jetzt dieses Problem sowie noch andere Belastungsfälle der Kreisplatte kurz behandelt werden. W. König (63) hat später im Anschluß an einen besonderen Fall allseitiger Randbeanspruchung, der noch besprochen wird, auch die Doppelbrechung und Spannungsverhältnisse in einer kreisförmigen Scheibe bei verschiedener äußerer Beanspruchung theoretisch untersucht und eine Berechnung der Spannungszustände durch Reihenentwicklung gegeben. H. Rieth (80) hat dann gezeigt, daß man die entsprechenden Gleichungen für die drei folgenden Fälle auch durch verhältnismäßig einfache Ausdrücke endlich geschlossener Form darstellen kann.

Bei der Belastung einer Kreisscheibe durch 2 an den Endpunkten eines Durchmessers senkrecht zum Rande angreifende Druckkräfte, ein Fall, der auch bereits von Mesnager (73) behandelt wurde, ergibt die Rechnung für die Hauptspannungsrichtung:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\varrho^2 \sin 2\psi\,(\cos 2\varepsilon - \varrho^2 \cos 2\psi)}{1 - 2\varrho^2 \cos 2\psi \cos 2\varepsilon + \varrho^4 \cos 4\psi},$$

hierin bedeutet ϱ das Verhältnis vom Radius eines beliebigen Plattenpunktes r zum Radius der Platte r_0, ψ den Winkel zwischen vertikaler Druckachse und dem Radius r des zu untersuchenden Punktes. Da sich die Forderung der Theorie, daß die beiden Druckkräfte in je einem Punkt des Randes angreifen sollen, experimentell nicht erfüllen läßt und so eine Prüfung der Theorie nicht ohne weiteres möglich ist, so ist die Berechnung erweitert worden unter der Berücksichtigung, daß die Kraft in einem kleinen Winkelbereich von der Breite 2ε angreift. Für den Fall, daß $\varepsilon =$ Null ist, geht also die Gleichung für die Streckenbelastung in die für Punktbelastung über. Für die relative Phasendifferenz eines beliebigen Punktes bezogen auf diejenige im Mittelpunkt, die ein Maß der relativen Spannungsverteilung ist, ergibt die Rechnung den Ausdruck:

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{1 - \varrho^2}{\sqrt{[1 - 2\varrho^2 \cos(2\psi + 2\varepsilon) + \varrho^4]\,[1 - 2\varrho^2 \cos(2\psi - 2\varepsilon) + \varrho^4]}}.$$

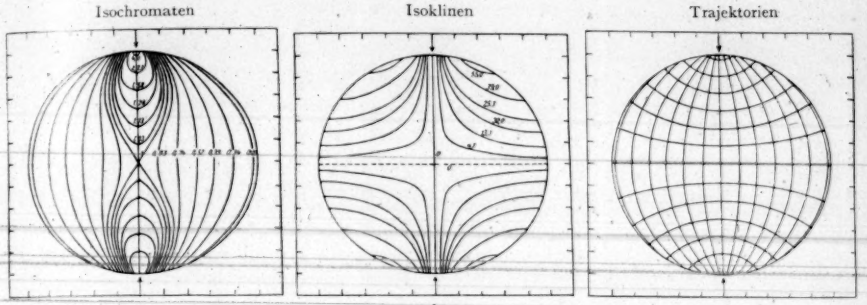


Fig. 23. Nach Steinheil (90).

Die Messungen von H. Steinheil (90) an einer Spiegelglasplatte von 50 mm Durchmesser und 7,7 mm Dicke ergab Werte, die mit der Rechnung in guter Übereinstimmung stehen. Fig. 23a—c gibt eine Übersicht über die Erscheinung durch Angabe der charakteristischen Kurven. Bemerkt sei hier noch, daß die Bestimmung der Isoklinen nicht durch Aufzeichnen der schwarzen Linie, die im geradlinig-polarisierten Licht den Polarisationsrichtungen parallel verlaufen, erfolgte, sondern durch eine punktweise Bestimmung der maximalen Aufhellung. Diesem etwas mühsamen Verfahren ist in manchen Fällen aber der Vorzug zu geben, da sich durch die bequeme Aufzeichnung der schwarzen Linien infolge deren Breite oft Ungenauigkeiten ergeben. Der Einfluß der Streckenbelastung ist in einiger Entfernung von den Druckpunkten nur noch unmerklich, so daß dann bereits mit der Formel, die eine punktförmige Belastung annimmt, gute Übereinstimmung zu erzielen ist (vgl. (57)). Für einen wagerechten, also zur Druckrichtung senkrechten Radius sind in der folgenden Tabelle berechnete und beobachtete Werte gegenübergestellt:

ϱ	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,80	0,88	0,96
Gemessen Δ/Δ_0	1	0,99	0,92	0,84	0,74	0,62	0,52	0,40	0,31	0,20	0,14	0,09	0,03
Berechnet Δ/Δ_0	1	0,98	0,93	0,84	0,74	0,63	0,53	0,40	0,30	0,22	0,13	0,07	0,02

Über den Einfluß der Streckenbelastung erhält man durch die nächste Tabelle, die die Werte Δ/Δ_0 für einen Radius in der Druckachse zusammenstellt, eine Übersicht:

ϱ	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,80	0,88	0,96
Gemessen Δ/Δ_0	1	1,01	1,03	1,09	1,13	1,16	1,28	1,40	1,58	1,84	2,29	2,93	3,97
Berechnet Δ/Δ_0	1	1,01	1,03	1,07	1,11	1,19	1,28	1,45	1,69	2,07	2,78	4,42	6,—
Δ/Δ_0	Berechnet unt. Berücksichtigung d. Streckenbelastung							1,41	1,58	1,83	2,32	3,01	4,—

Man ersieht daraus, daß von einer Entfernung vom Druckpunkt an, die etwa gleich dem halben Radius ist, der Einfluß der Streckenbelastung sich nicht mehr geltend macht. Die Berücksichtigung dieses Einflusses, in der in der Theorie angenommenen Weise für die Druckpunktnähe, liefert gute Übereinstimmung mit der Beobachtung.

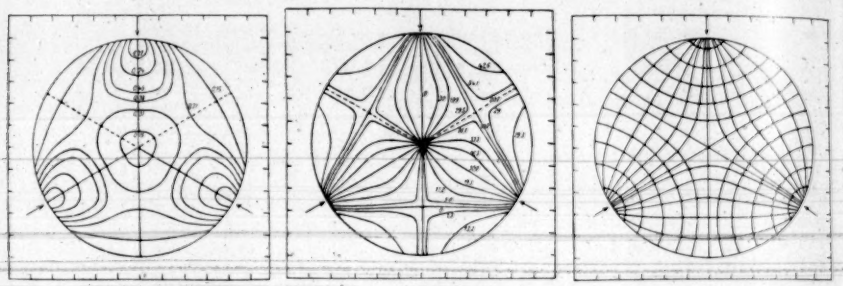
Während beim obigen Belastungsfall keine Stelle der Platte, abgesehen vom Rande, die Phasendifferenz Null hatte, kommen bei einer an drei Stellen symmetrisch am Rande gedrückten Platte solche Punkte vor und die Doppelbrechung erleidet jetzt auch einen Vorzeichenwechsel.

Die Gleichungen für die Hauptspannungsrichtungen und die relative Phasendifferenz ergeben sich nach H. Rieth (80) als:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\sin\psi - 2\varrho^3 \sin 2\psi \cos 3\varepsilon - \varrho^6 \sin 5\psi}{\cos\psi + 2\varrho^3 \cos 2\psi \cos 3\varepsilon + \varrho^6 \cos 5\psi}$$

und

$$\Delta/\Delta_0 = \frac{(1-\varrho^2)\,\varrho}{\sqrt{[1 + 2\varrho^3 \cos(3\psi + 3\varepsilon) + \varrho^6]\,[1 + 2\varrho^3 \cos(3\psi - 3\varepsilon) + \varrho^6]}},$$



a b c

Fig. 24. Nach Steinheil (90).

hierbei ist der Bezugspunkt, für den $\Delta/\Delta_0 = 1$ ist, aber nicht der Mittelpunkt, da ja hier die Gangdifferenz Null ist, sondern ein Punkt, der auf dem durch die Druckpunkte gehenden Durchmesser liegt. Fig. 24a zeigt für diesen Fall die Isochromaten. Durch die drei in der Richtung der äußeren Drucke liegenden Durchmesser wird die Platte in 6 symmetrische Teile geteilt, so daß es zur völligen Beschreibung des Spannungszustandes genügt, sich auf einen solchen Sextanten zu beschränken. Auf jedem dieser Durchmesser findet auch ein Vorzeichenwechsel der Doppelbrechung statt, was leicht verständlich ist, da man vom Druckpunkt ausgehend, zunächst nur Gebiete durchschreitet, die unter dem Einfluß des radialen Druckes stehen. Jenseits des Mittelpunktes machen sich aber die Querdrucke, die von den anderen beiden Stellen herrühren, bemerkbar und es gibt einen Punkt, in dem sich der Radialdruck und die Querdrucke kompensieren. Weiterhin überwiegt dann sogar der Einfluß der Querdrucke, so daß ein Druckzustand mit entgegengesetztem Vorzeichen herrscht, der ein Maximum erreicht und dann nach dem Rand zu abfällt. Fig. 25 gibt den Spannungsverlauf für einen solchen Durchmesser nach den Messungen von Steinheil wieder. Als Ordinaten sind hier nur die Absolutwerte der Spannungen aufgezeichnet, so daß die Kurve unter Berücksichtigung des Vorzeichens, nachdem sie die Abszissenachse getroffen hat, im negativen Gebiet einen Verlauf nehmen müßte, der durch Spiegelung an der x-Achse aus dem gezeichneten hervorgeht. Der Verlauf der Isoklinen und der Trajektorien ist in Fig. 24b und c dargestellt, die Auswertung im einzelnen ergab auch wieder eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung.

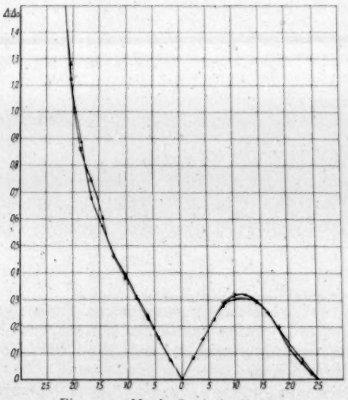


Fig. 25. Nach Steinheil (90).

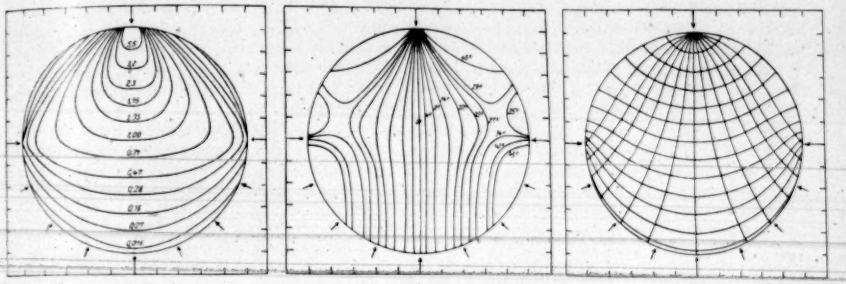
Bei einer Belastung, die auf der einen Hälfte der Platte in einer durch gleichmäßige radiale Druckkräfte über einen Halbkreis und in einer an einem Peripheriepunkt, der senkrecht über dem Mittelpunkt des Halbkreises liegt, radial angreifende Druckkraft besteht, ergibt sich nach H. Rieth: für

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\varrho \sin\psi \cos\varepsilon + 2\varrho^2 \sin 2\psi + 2\varrho^3 \sin 3\psi \cos\varepsilon + \varrho^4 \sin 4\psi}{1 + 2\varrho \cos\psi \cos\varepsilon + 2\varrho^2 \cos 2\psi + 2\varrho^3 \cos 3\psi \cos\varepsilon + \varrho^4 \cos 4\psi}$$

und für

$$\Delta/\Delta_0 = \frac{1 - \varrho^2}{\sqrt{[1 + 2\varrho\cos(\psi+\varepsilon) + \varrho^2][1 + 2\varrho\cos(\psi-\varepsilon) + \varrho^2][1 + 2\varrho^2\cos 2\psi + \varrho^4]}}$$

hierin ist Δ_0 wieder die Phasendifferenz im Mittelpunkt der Platte.



a b c

Fig. 26. Nach Rieth (80).

Die experimentelle Prüfung dieses Falles, die auch von H. Rieth vorgenommen wurde, ist wegen eines geeigneten gleichmäßigen Druckes auf den Halbkreis schwierig. Bei geeigneter Vorsicht läßt sich aber auch hier eine befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie erzielen (Fig. 26a—c). Eine quantitativ bessere Übereinstimmung mit der Theorie ergaben die Messung von Bell (13), da er günstigere Versuchsbedingungen anwenden konnte.

Einen eigenartigen Fall allseitiger Belastung am Rande, der einen einfachen Verlauf der Isochromaten zeigt, hat W. König (63) an Gelatinezylindern realisiert und sowohl theoretisch wie experimentell genau untersucht. Die Belastung wird auf folgende Weise erreicht. Ein elastischer kreisförmiger Ring z. B. aus Zelluloid wird durch schwachen Druck auf zwei diametral gelegene Randpunkte zu einer angenähert elliptischen Form mit geringer Exzentrizität gedrückt. Dieser Ring wird dann mit einer geeigneten Gelatinelösung ausgegossen und dann nach deren Erstarren mit einer Hilfsvorrichtung in die ursprünglich kreisförmige Gestalt gedrückt. Auf diese Weise ist in dem Zylinder ein Spannungszustand geschaffen, bei dem die Hauptspannungsrichtungen in allen Zylinderpunkten gleich sind. Zwischen gekreuzten Nicols in geradlinigpolarisiertem Licht erscheint daher die Scheibe, wenn die Achsen der früheren Ellipse, also die Zug- und Druckrichtungen, parallel zu den Polarisationsrichtungen liegen, völlig dunkel. In der Diagonalstellung dagegen zeigt sich ein konzentrisches Ringsystem als Isochromaten, die nach dem Zentrum zu steigende Gangdifferenz haben (Fig. 27). Im Gegensatz zu einem ähnlichen Verlauf der Isochromaten, den man bei radialbeanspruchten Kreisringen hat, besteht der Unterschied hier darin, daß beim Kreisring die konzentrisch verlaufenden Interferenzlinien von einem in den Polarisationsrichtungen liegenden schwarzen Kreuz durchsetzt sind, da die Hauptspannungsrichtungen radial und tangential sind.

Die Verteilung der Spannungen über einen Durchmesser erfolgt nach einem parabolischen Gesetz. In einer ausführlichen Bearbeitung wird dann von König eine vollständige Theorie der Erscheinungen mit Randbedingungen in verschiedener Annäherung und Berücksichtigung

Fig. 27. Nach König (63).

der Dickenveränderung nebst einer Lösung durch Reihenentwicklung gegeben.

Die Veranlassung, einen solchen Beanspruchungsfall herzustellen, wurde durch ein von Ambronn (6) angegebenes Verfahren zur Messung der Differenz der Suszeptibilitäten von Stoffen mit künstlicher Anisotropie gegeben. Dieses Verfahren wurde von König weiter entwickelt und ist dann von Braunbeck und Steitz (15) (91) zu Messungen verwandt worden.

Eine kreisförmige Scheibe, die an ihrem äußeren Rande gleichförmig von radialgerichteten Kräften beansprucht wird, zeigt keinerlei Doppelbrechung, wohl aber ein Kreisring (vgl. später). Man kann aber auch bei einer Vollscheibe ganz analoge Doppelbrechungserscheinungen wie bei mechanisch beanspruchten Kreisringen beobachten, wenn in der Scheibe ein radiales Temperaturgefälle erzeugt wird. Diese Erscheinungen sind bereits von F. Neumann (75) ausführlich beschrieben worden. Man kann so-

wohl die Fälle einer von innen nach außen, als auch einer von außen nach innen gerichteten radialen Beanspruchung durch geeignete Temperaturfelder erzielen. Der vollständigen Analogie der Erscheinungen wegen mit den nun folgende Erörterungen über die Kreisringe soll auf diese Versuche, die auch von W. König (66) noch einmal kurz zusammengestellt worden sind, nicht weiter eingegangen werden.

g) Radialbeanspruchte Kreisringe.

Die Frage nach der Spannungsverteilung in der Wandung eines Hohlzylinders bei radialem inneren oder äußeren Druck ist von großer Bedeutung für technische Probleme z. B. für den Bau von hydraulischen Druckzylindern oder von Geschützrohren. Theoretisch ist die Spannungsverteilung in der Wand von Geschützrohren von Gadolin und unabhängig von Böltzmann untersucht worden. Die Theorie zeigt, daß in einem zylindrischen Rohr, das einem starken inneren Überdruck ausgesetzt ist, die größte Spannung unmittelbar an der Innenwand des Rohres herrscht und sehr rasch nach außen hin abnimmt, so daß also diese Partien nur noch unwesentlich an der Festigkeit des Rohres mitwirken können. Eine Vergrößerung der Wandstärke erhöht somit praktisch die Festigkeit des Rohres nicht wesentlich. Für die Konstruktion von Geschützrohren hat man daher aus dieser Erkenntnis ein Herstellungsverfahren zugrunde gelegt, bei dem man die Rohre aus zwei oder mehreren Zylindern, die in heißem Zustande übereinander geschoben werden, herstellt. Nach dem Erkalten versetzt das äußere Rohr das innere unter einen starken Außendruck, wodurch die Festigkeit sehr erhöht werden kann. Ganz analog liegen die Verhältnisse, wenn ein Rohr einem äußeren Überdruck ausgesetzt ist. Der Charakter der Spannung ist dann aber entgegengesetzt dem bei innerem Überdruck.

Eine direkte Prüfung der von der Theorie geforderten Abhängigkeit konnte König (64)[1]) durch die Messung der Doppelbrechungserscheinungen an Gelatine- und Glasringen vornehmen. Die Theorie ergibt für die beiden Spezialfälle, daß auf den Ring nur ein innerer oder nur ein äußerer Druck wirkt, als wesentlichstes, daß die Gangdifferenz umgekehrt proportional dem Quadrat des Radius ist. In beiden Fällen ist das Vorzeichen der Doppelbrechung entgegengesetzt und bei gleichen P_i und P_a hat sie den gleichen absoluten Betrag.

Fig. 28 zeigt das prinzipielle Bild zwischen gekreuzten Nicols. Zur eigentlichen Messung wurden aber nicht so starke Drucke angewandt, so daß die Gangdifferenzen die erste Ordnung nicht überschritten.

Mit welcher Genauigkeit das theoretisch ge-

Fig. 28. Nach König (64).

forderte Gesetz der quadratischen Beziehung zwischen Δ und r sich bei entsprechender Sorgfalt bestätigt, zeigt die folgende Tabelle:

r	8,85	9,85	10,85	11,85	12,85	13,85
Δ	0,578	0,468	0,387	0,324	0,237	0,241
Δr^2	45,3	45,4	45,5	45,6	45,0	46,2

Weitere Messungen über die Spannung in Glasringen sind von Bell (13) in seiner noch nicht veröffentlichten Gießener Dissertation ausgeführt worden.

h) Zugstäbe mit diskontinuierlichen Stellen im Innern (Kreisloch, elliptisches Loch, Risse).

Eine Anzahl Arbeiten von Coker und seinen Schülern beschäftigt sich mit dem Studium der Spannungsverteilung in beanspruchten Körpern, die mit Löchern versehen sind. Solche Beanspruchungsfälle sind technisch von großem Interesse.

Das einfachste von Coker (19) untersuchte

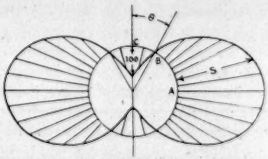


Fig. 29. Nach Coker (19).

Beispiel behandelt einen gleichförmig gedehnten Streifen der zentral mit einem kreisförmigen Loch versehen ist. Zur vollständigen Bestimmung der Spannungsverhältnisse ist die Ermittlung der Trajektorien und Isochromaten erforderlich. Über den Spannungsverlauf am Rande des Loches ist aber sofort, bereits durch Bestimmung der Phasendifferenz in den einzelnen Randpunkten ein Überblick zu erreichen. In Fig. 29 sind nach Coker zu jedem Radiusvektor vom Lochzentrum

1) Wie ich nachträglich feststellen konnte, ist auch bereits von Maxwell (72) das Problem vom optischen Standpunkte aus behandelt worden.

aus die jedem Winkel Θ (gemessen von der Zugrichtung aus) zugehörigen Spannungswerte durch die Verhältnisse der mit S bezeichneten Geraden angegeben. An den beiden Randstellen für die $\Theta = 90^0$ ist, hat die Zugspannung ihr Maximum, und zwar ist dieser Wert etwa 3 mal so groß als der mittlere angewandte Zug. Je mehr der Radiusvektor sich aus der 90^0-Lage in die Dehnungsrichtung nähert, nimmt die Zugspannung ab, und bei $\Theta =$ ca. 30^0 ist der Rand spannungslos. (Was sich zwischen gekreuzten Nicols unmittelbar durch das Auftreten einer isotropen Stelle zeigt.) In dem Winkelbereich von $\Theta = \pm 30^0$ herrscht Druckspannung, die in der Zugrichtung ihren maximalen Wert hat, der etwa gleich dem mittleren angewandten Zug ist.

Für den Spannungsverlauf in den übrigen Teilen der Platte zeigt Fig. 30a den Isoklinenverlauf und Fig. 30b den daraus konstruierten Trajektorienverlauf.

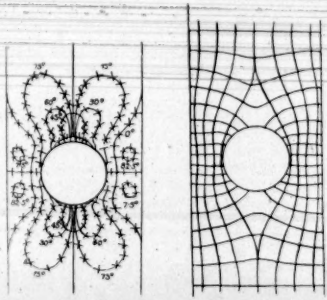


Fig. 30. Nach Coker (19).

Ein Vergleich der experimentell ermittelten Werte mit den von der Theorie geforderten, liefert eine gute Übereinstimmung. Für eine sehr große Platte mit einem Loch vom Radius a ergibt sich theoretisch die Spannung in Polarkoordinaten (vgl. z. B. Föppl (42), 5. Bd., S. 349):

$$\sigma_r = \frac{p}{2}\left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\Theta\right]$$

$$\sigma_t = \frac{p}{2}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\Theta\right]$$

$$\tau_{rt} = \frac{p}{2}\left(-1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\Theta$$

und für den Spezialfall des kleinsten Querschnittes vereinfachen sich die Gleichungen zu:

$$\sigma_r = \frac{3p}{2}\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{p}{2}\left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)$$

$$\tau_{rt} = 0.$$

Da die Formeln für eine unendlich ausgedehnte Platte ausgerechnet sind, so ist für den Vergleich mit dem Experiment eine Korrektion erforderlich.

Wird das Loch im Vergleich zur Breite des Streifens vergrößert, so ändert sich die Spannungsverteilung, wenn auch nicht in ihrem prinzipiellen Charakter. Fig. 31 gibt ein Bild des Spannungsverlaufes über den kleinsten Querschnitt und längs der Kanten in der Nähe des Loches für einen Streifen von 1 Zoll (25,4 mm) Breite mit einem Loch von $^1/_2$ Zoll (12,7 mm) Durchmesser. Mit zunehmendem Lochdurchmesser wird der Winkel für den die Randspannung Null ist,

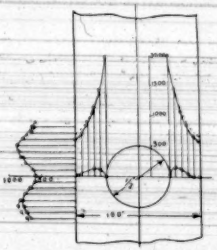


Fig. 31. Nach Coker (19).

größer. Der maximale Wert der Zugspannung, der bei einem kleinen Loch das Dreifache der angewandten Spannung war, nimmt allmählich ab, in dem in der Fig. dargestellten Fall ist er noch etwa 3fach. Die Spannungsverteilung an den Kanten des Stabes, die bei einem kleinen Loch fast konstant ist, erhält bei zunehmendem Lochdurchmesser an der Stelle des kleinsten Querschnittes ein ausgesprochenes Minimum und an zwei symmetrisch nach oben und unten entfernten Stellen ein Maximum. Die Differenz der Kantenspannung beträgt bei dem in Fig. 31 dargestellten Fall etwa 40 Proz., wächst aber mit zunehmendem Lochdurchmesser erheblich und ist z. B. bei einem Streifen von 1,1 Zoll (28 mm) Breite und einem Lochdurchmesser von 0,88 Zoll (22,4 mm) 3 mal so groß, wie der Wert der Kantenspannung im mittleren Querschnitt.

Ein Schüler Cokers, Satake (siehe 19) hat für einen speziellen Fall an einem Stahlblock durch Messungen der Querkontraktion die Spannungsverteilung beim Vorhandensein eines Kreisloches bestimmt und mit guter Übereinstimmung zu den optisch ermittelten Ergebnissen gefunden. (Vgl. auch D. Rühl (82).)

Die Untersuchung der Veränderung der Spannungsverteilung beim Vorhandensein eines elliptischen Loches, hat gewöhnlich kein unmittelbares praktisches Interesse, da solche Löcher bei Konstruktionen seltener vorkommen. Die

Kenntnis dieser Veränderungen ist aber wichtig, weil die Spannungsverteilung in der Nähe von Sprüngen und Rissen, die häufig als Grenzfälle einer Ellipse mit sehr großer Exzentrizität aufgefaßt werden können, praktisch von großer Bedeutung ist.

Coker und Kimball (25) haben hierüber Untersuchungen angestellt. Bei einem elliptischen Loch in einer großen Platte, das mit seiner großen Achse senkrecht zur Dehnungsrichtung orientiert ist, zeigt sich im polarisierten Licht unmittelbar das Auftreten starker Zugspannungen an den Enden der großen Achse. Fig. 32 gibt

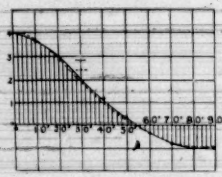


Fig. 32. Nach Coker (19).

einen quantitativen Überblick für den Verlauf der Randspannungen einer Ellipse mit einem Achsenverhältnis 3/2. Die Spannung an den Enden der großen Achse ist etwa von der vierfachen Größe der äußeren angewandten, während an den Enden der kleinen Achse, also in der Zugrichtung ein Druck von der gleichen Größe des äußeren Zuges herrscht. Die gemessenen Werte sind in guter Übereinstimmung mit den von Inglis (56) theoretisch berechneten, die für eine Maximalspannung die Größe $R\,(1 + 2a/b)$, wobei R der äußere aufgewandte Zug und a/b das Achsenverhältnis ist, ergeben. Aus dieser Beziehung ist auch ersichtlich, daß man zu extrem hohen Spannungen kommt, wenn man in einem gedehnten Stab senkrecht zur Dehnungsrichtung einen schmalen Schlitz anbringt. Es ist eine bekannte Beobachtung, daß nach dem Auftreten solcher Risse bei der Dehnung eines Körpers sehr schnell Bruch erfolgt.

Um die bei dem Auftreten eines Risses entstehenden gefährlichen Spannungen in ihrer Wirkung herabzusetzen, wendet man in der Praxis das Verfahren an, daß man die Enden des Risses durch Aufbohren zu einem kreisförmigen Loch erweitert. Eine systematische Prüfung dieser Fragen ließ Coker (23) eine Methode finden, um die Spannungen noch mehr zu reduzieren, es geschieht das nämlich dadurch, daß man an Stelle der kreisförmigen Erweiterung an den Enden des Risses eine elliptische anbringt. Die Fig. 33 zeigt die Spannungsverminderung für drei verschiedene Behandlungen der Enden des Risses.

Sind die Achsen der Ellipse gegen die Dehnungsrichtung geneigt, so entsteht eine Maximalspannung an den Stellen des Randes, die eine zur Dehnungsrichtung parallele Tangentenrichtung aufweisen. Fig. 34 stellt in der einen Hälfte den Verlauf der Isoklinen, in der anderen den der Trajektorien dar, für eine unter 49° gegen die Drehrichtung geneigte große Achse.

i) Diskontinuierliche Stellen an den Kanten (Einkerbungen, Ecken — scharfe und abgerundete —).

Bei Dehnungs- und Zerreißproben zur Vergleichung verschiedener Materialien spannt man bekanntlich einen prismatischen oder zylindrischen Stab gleichmäßig an beiden Enden ein und setzt ihn einem wachsenden Zug aus, bis der Bruch erfolgt. Um brauchbare Vergleichswerte der verschiedenen Proben erhalten zu können, muß man sicher sein, daß die an der Zerreißungsmaschine gemessene Spannung auch tatsächlich auf den betrachteten Teil des Probekörpers wirken. Damit man im mittleren Teil eines Probekörpers möglichst gleichmäßige Spannungsverteilung erhält, versieht man die Probestücke mit verstärkten Enden. Es kommt aber ganz auf die Verhältnisse des verbreiterten zu dem mittleren

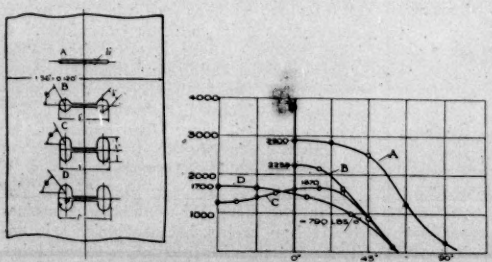


Fig. 33. Nach Coker (23).

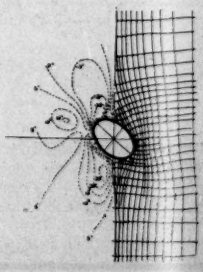
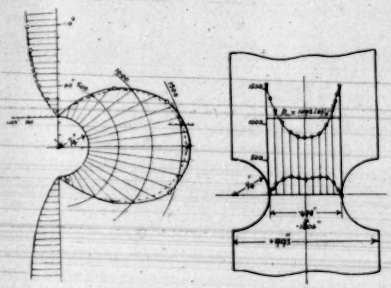


Fig. 34. Nach Coker (19).

Teil sowie auf die Art des Übergangs beider Teile ineinander an, um eine möglichst gleichmäßige Spannungsverteilung zu erhalten.

Coker (26) untersucht zunächst die Verteilung der Spannung in einem gleichförmig gedehnten Balken, der an jeder Seite symmetrisch zur Mittellinie mit einer halbkreisförmigen Aus-



a b

Fig. 35. Nach Coker (19).

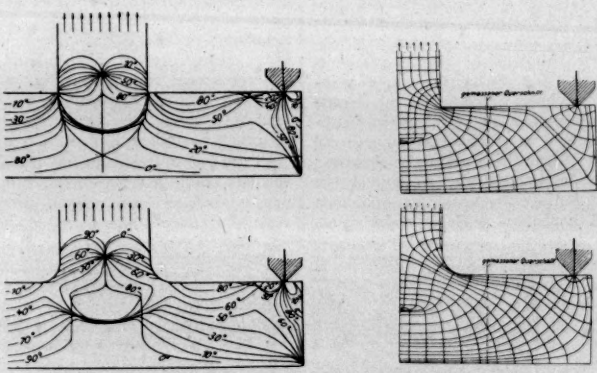
sparung versehen ist. Bei einer Platte von 1 Zoll Breite und einem Lochradius von $^1/_4$ Zoll zeigt sich bei einem mittlerem angewandten Zug von 1092 lbs/square inch der in Fig. 35a angegebene Verlauf der Kantenspannung. Die Spannung an der tiefsten Stelle der Aussparung ist fast 50 Proz. größer als der mittlere angewandte Zug. Eine gleichförmige Beanspruchung ist erst in einem Abstand, der ungefähr gleich dem vierfachen Radius ist, vom kleinsten Querschnitt zu beobachten. Der Spannungsverlauf über den kleinsten Querschnitt ist durch Fig. 35b dargestellt.

Eine exakte mathematische Lösung des obigen Problems liegt nicht vor, wohl aber ist für den Fall einer einzelnen halbkreisförmigen Einkerbung in einer sehr großen Platte von Léon (70) ein Näherungsverfahren gegeben worden. Wendet man dieses auf den vorliegenden Fall an, so ergibt sich zwischen Rechnung und Beobachtung eine gute Übereinstimmung.

Aus der besprochenen Form leitet Coker die Form eines Prüfstückes ab, indem er zwischen die beiden Hälften, die er durch einen durch den minimalen Querschnitt geführten Schnitt erhält, ein paralleles Stück von der Breite des kleinsten Querschnittes einsetzt. Er untersucht ausführlich die verschiedenen Arten so erhaltener Probekörper unter anderem auch den „British Standard Test Bar for Plates".

Über den Spannungsverlauf bei Einkerbungen verschiedener Form an der Kante eines Zugstabs haben Coker und Heymans (27) ausführliche Untersuchungen angestellt (vgl. dazu auch (50)).

Mit der Ermittlung der Spannungsverhältnisse in Z- und T-Stücken befassen sich Arbeiten von Tuzi (93), Birnbaum (16), sowie eine kurze nicht publizierte Untersuchung aus dem physikalischen Institut der Universität Gießen von Kämmerer (58), die auf Veranlassung von Herrn Geheimrat König unternommen worden ist[1]). Birnbaum, der die Spannungsverteilung der durch Zentrifugalkraft beanspruchter Schaufelfüße von Turbinen studieren will, führt die ersten messenden Versuche an belasteten T-



a b

Fig. 36. Nach Birnbaum (16).

[1]) Herrn Geh. Rat König möchte ich auch an dieser Stelle für die mir liebenswürdigerweise zur Publikation überlassenen Figuren von Herrn Kämmerer danken.

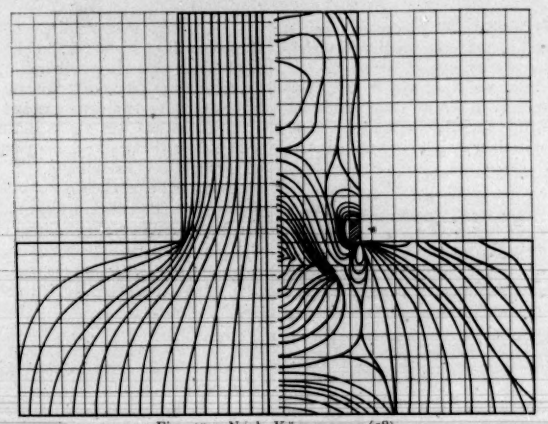
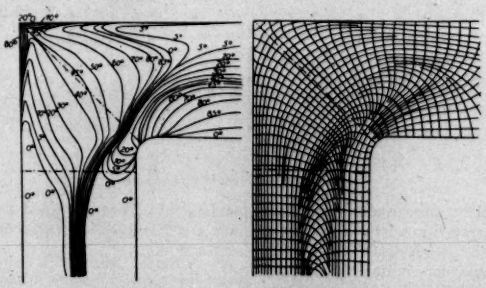


Fig. 37. Nach Kämmerer (58).

Stücken mit scharfen und abgerundeten Ecken (5 mm Radius) aus, die auf parallelen Schneiden aufliegen. Er verwendet Zelluloidmodelle, bei denen sich an den Stellen großer Spannungskonzentration bleibende Aufhellungen zeigten. Bis auf diese Stellen erhielt er aber mit der Theorie übereinstimmende Werte. Die völlige Berechnung der Spannungen für einzelne Querschnitte wurde nach dem 2. Verfahren (Seite 512) durchgeführt. Fig. 36a u. b zeigt Isoklinen- und Trajektorienverlauf in beiden Fällen.

Eine ungefähre Übersicht über den Trajektorienverlauf in einem Schaufelfuß, der zunächst der Einfachheit halber nicht im Zentrifugalfeld, sondern unter der Wirkung einer Zugkraft vorgenommen wurde, konnte er durch die Beobachtung erhalten. Eine exakte Bestimmung hatte gewisse Schwierigkeiten, da einmal ein gleichmäßiger Auflagerdruck auf den Schultern infolge der flächenhaften Auflager nicht zu erzielen war, und ferner die Zelluloidmodelle bei der Herstellung beträchtliche Vorspannungen, also bleibende Aufhellungen erhalten hatten. Die Untersuchung von Kämmerer wurde an einem Glasmodell mit punktweiser Ausmessung (S. 511) ausgeführt. Die Belastung erfolgte durch einen gleichmäßigen Druck auf den schmalen Arm des T-Stückes, das mit seiner breiten Seite gleichmäßig auflag. Auch hierbei ergaben sich bezüglich einer gleichmäßigen Lagerung und Belastung gewisse Schwierigkeiten, doch waren keine nennenswerten bleibenden Aufhellungen von vornherein vorhanden. Fig. 37 zeigt in der rechten Hälfte die Kurven gleicher Drucke, während die linke Hälfte den Verlauf der einen Trajektorienschar wiedergibt.

Tuzi (93) untersucht um die Eignung des von ihm studierten Materials für optische Spannungsmessungen zu zeigen, die Spannungsverteilung eines L-förmigen Balkens mit ab-



a b

Fig. 38. Nach Tuzi (93).

a b c

Fig. 39. Nach Heymans u. Kimball (48).

gerundeter Ecke, (5 mm Radius), der am wagerechten Arm belastet ist an einem Phenolith-Modell. Fig. 38a zeigt die Isoklinen, Fig. 38b die Trajektorien. Längs der Querschnitte *AA* und *BB* nimmt er nach der zweiten Methode (Seite 512) eine vollständige Bestimmung der einzelnen Spannungskomponenten vor, wobei sich eine gute Übereinstimmung mit der Theorie ergab. Ob in den Ecken bleibende Aufhellung beobachtet wurde, teilt der Verfasser nicht mit. Sollte diese nicht nennenswert sein, so würde auch daraus ein gewisser Vorteil dieses Materials an Stelle von Zelluloid zu Modellen zu verwenden, hervorgehen.

3. Über ein spezielles technisches Beispiel. (Spannungen in Zahnrädern.)

Eine Untersuchung über die Ursache der Brüche von Zahnrädern elektrischer Bahnmotoren bildet den Gegenstand einer interessanten Arbeit von Heymans und Kimball (48). Die technisch gebräuchlichen Berechnungsmethoden der Spannungen in einem in Betrieb befindlichen Zahnrad können oft die tatsächlichen Verhältnisse nicht richtig erfassen, da die verschiedensten Faktoren die Spannungsverteilung und damit die Maximalspannung beeinflussen, so daß häufig Materialfehler für Brüche verantwortlich gemacht werden, wo es sich aber nur um eine unerwartete Spannungskonzentration handelt. Die optischen Studien haben nun wichtige Resultate für die Beurteilung der Beanspruchungsverteilung ergeben, die zum Teil ganz neu waren. Versuche an Stahlmodellen, die bis zum Bruch belastet wurden, konnten auf Grund des optischen Befundes in ihren Ergebnissen vorausbestimmt werden.

Ein sehr wichtiger die Spannungsverteilung beeinflussender Faktor ist die Montage der Zahnräder auf der Achse. Normalerweise geschieht diese so, daß die Räder, die eine schwach konische Bohrung besitzen und einen Lochdurchmesser haben, der etwas geringer als der der Achse ist, in heißem Zustand (bei der Temperatur von siedendem Wasser) leicht auf die Achse gebracht werden können, auf der sie dann nach der Abkühlung festsitzen. Wenn nun aber die Montage nicht so vorschriftsmäßig ausgeführt wird, sondern die Räder z. B. mit großer Gewalt bei höherer Temperatur auf eine möglichst starke Achse aufgetrieben werden, um eine Loslösung während des Betriebes zu verhindern, so können dadurch zu starke radiale Drucke erzeugt werden, die im Verlaufe des Betriebes zum Bruch führen.

Eine Untersuchung von Zahnradmodellen aus Zelluloid, die auf einer Achse montiert waren, ergaben nun, daß die Spannung an denjenigen Stellen maximale Werte hatte, wo die Radien nach der Mitte der Zähne den inneren Randumfang schneiden. Versuche an Stahlzahnrädern, die auf radialen Druck beansprucht waren, ergaben nun auch Bruch längs dieser Radien, also mitten durch einen Zahn, wie es Fig. 39a an zwei Beispielen zeigt. Dieses Resultat, was zunächst völlig überraschend ist, ist durch die optische Methode vorausgesagt worden, und gibt einen sehr guten Beweis für den Nutzen dieses Verfahrens.

Des weiteren wurde die Spannungsverteilung unter zusammengesetzter Beanspruchung studiert. So ergab sich bei einem normal übertragenen Drehmoment und starker radialer Beanspruchung ein Spannungszustand, der einen Bruch, wie ihn Fig. 39b zeigt, vorauszusagen gestattete. Der Bruch ist in Form einer *V*-förmigen Einkerbung erfolgt. Die Öffnung dieser Einkerbung nimmt mit zunehmendem radialem Druck ab. Fig. 39c zeigt einen Bruch bei schwacher radialer Beanspruchung, der ein glattes Abspringen der Zähne erkennen läßt. Als anderer extremer Fall, der *V*-förmigen Einkerbung bei höchster radialer Beanspruchung ist der in Fig. 39a bereits besprochene aufzufassen. Durch systematische Studien sind die verschiedenen Übergänge in dem *V*-förmigen Bruch zu beobachten. Auf weitere Einzelheiten, insbesondere auf die eigentliche Spannungsanalyse soll hier

nicht mehr eingegangen werden, sondern es wird auf die Arbeit von Heymans und Kimball verwiesen (siehe auch Heymans (49) und Kronenberg (68)).

Gerade diese Untersuchung zeigt, daß die optische Methode nicht nur gestattet eine elastizitätstheoretische Spannungsverteilung zu prüfen oder zwischen zwei verschiedenen Theorien eine Entscheidung zu fällen, sondern besonders auch mit Vorteil angewandt wird, wo eine brauchbare Theorie nicht aufgestellt werden kann. Heymans bemerkt am Schluß seiner Arbeit (49) auch sehr treffend, „daß es wenig zweifelhaft scheint, daß Brüche, deren Ursache einem Materialfehler zugeschrieben wird oder rätselhaft bleibt, oft ihre Erklärung finden werden, durch eine bessere Kenntnis der Spannungen, die tatsächlich in einer Konstruktion herrschen und nicht der Spannungen, die existieren würden, wenn die idealen Bedingungen oder die vereinfachten Hypothesen unserer Rechnung sich verwirklicht finden würden."

Literaturverzeichnis[1]).

1) Adams, L. H. u. Williamson, E. D., Journ. of the Washington Acad. of Sciences, Vol. **9**, Nr. 20, 1919, und Phys. Rev. **14**, 99, 1919.

2) Ambronn, H., Über die Anomalien bei der akzidentellen Doppelbrechung. Berichte d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Kl. **50**, 1—31, 1898.

3) — Über die Dispersion der Doppelbrechung in den Mischkristallen von Strontium- und Bleidithionat. Zeitschr. f. Kristallogr. u. Min. **52**, 48—57, 1913.

4) — Über anomale Doppelbrechung beim Zelluloid. Berichte d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Kl. **63**, 249—257 u. 402—406, 1911.

5) — u. Frey, A., Das Polarisationsmikroskop. Leipzig 1926 in Kolloidforschung in Einzeldarstellungen, herausgeg. v. R. Zsigmondy, Bd. 5.

6) — Über das Verhalten doppelbrechender Gelatineplatten gegen Magnetismus und Elektrizität. Ber. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Math. phys. Kl. **43**, 394 bis 398, 1891.

7) Andrade, The Distribution of Slide in a Right Six Face subjekt to Pure Shear. Roy. Soc. Proc. A. **85**, 1911.

8) Arakawa, I., On the Determination of Stress-optical Coefficient of Bakelite with Initial Stress Proc. of Physico-Math. Soc. of Japan, **8**, 1923; Ser. 3, Vol. V, Nr. 9—11; Some Adventages obtained from Bakelite in Photo-Elastic Observation 1925, Vol. VII, Nr. 11.

9) Asch, E., Untersuchung der Spannungen des gebogenen Balkens im polarisierten Licht. Zeitschr. f. techn. Phys. **3**, 294—305, 1922.

10) Aue, J., Zur Berechnung der Spannungen in gekrümmten Stäben (mit Hilfe der optischen Methode). Diss. Jena 1909.

11) Balinkin, Isay A., An optical determination of axial stresses in long rectangular plates under torsion, Phys. Rev. **30**, 520—526, 1927.

12) Bach, C., Elastizität und Festigkeit. 9. Aufl. gem. mit R. Baumann, Berlin 1924.

13) Bell, Gießener Dissertation 1926. Noch nicht veröff. (Über Doppelbrechung in Glasringen.)

14) Berndt, G., Zeitschr. f. Instr. **40**, 2c—27, 37—42, 56—61, 70—75, 1920.

15) Braunbeck, C., Über die magnetischen Eigenschaften von Stoffen mit künstlicher Anisotropie, Diss. Gießen 1918.

16) Birnbaum, W., Optische Untersuchung des Spannungszustandes in Maschinenteilen mit scharfen und abgerundeten Ecken, Zeitschr. f. techn. Phys. **5**, 143—149, 1924.

17) Bjerkén, Wied. Ann. 808 u. f., 1891.

18) Brewster, D., On the communication of the structure of doubly refracting crystals to glass, muriale of soda, fluors squere, and other substances, by mechanical compression and dilatation, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 156—178, 1816.

19) Coker, E. G., Photo Elasticity for Engineers, Gen. Elec. Rev. 1. Teil: Vol. **23**, Nr. 11, 870—877, 1920; 2. Teil: Vol. **23**, Nr. 12, 966—973, 1920; 3. Teil: Vol. **24**, Nr. 1, 82—88, 1921.; 4 Teil: The Use of Photo-Elastic Methods in the Design of the Elements of Machines and Structures, Vol. **24**, Nr. 3, 222—226, 1921; 5. Teil: The Stress-Strain Properties of Nitro-Cellulose and the Law of its Optical Behaviour, Vol. 24, Nr. 5, 455—466, 1921.

20) — The optical Determination of Stress. Phil. Mag. **20**, 740 u. f., 1910.

21) — The Effects of Holes and Semicircular Notches on the Distribution of Stress in Tension Members. Proceedings of the Physical Society of London, **25**, 95—105, 1913.

22) — An optical Determination of the Variation Stress in a Thin Rectangular Plate subjected to shear. Proc. of the Roy. Soc. ser. A, **88**, 291—319, 1912.

23) — The Determination by Photo Elastic Methods of the Distribution of Stress in Plates variable Section, with some Application to Ships' Plating. Transactions of the Institution of Naval Architects, 1911.

24) — und Scoble, W. A., The Distribution of Stress due to a Rivet in a Plate. Ebenda, **55**, 207—218, 1913.

25) — und Kimball, A. L. jun., The Effects of Holes, Cracks and other Discontinuities in Ship's Plating. Ebenda, **62**, 117—123, 1920.

26) — Photo Elastic Measurements of the Stress Distribution in Tension Members used in the Testing of Materials. Minutes of the Proc. Inst. Civil Eng., London 1921.

27) — und Heymans, P., Stress Concentrations due to Notches and like Discontinuities. Report of the British Association for the Advancement of Science, **89**, 291—299, 1921.

28) — und Filon, L. N. G., Experimental Determination of Stress and Strain in Solids. Ebenda, 201—210, 1914.

29) — und Thompson, The Design and Construction of large Polariskopes. Engineering **94**, 134—135, 1912.

1) Herrn Prof. Dr. W. Eitel, Berlin-Dahlem, Herrn Direktor Dr. Fleischmann von der A.E.G. Berlin und Herrn Geh. Rat. Prof. Dr. W. König, Gießen, bin ich für die Überlassung von teilweise schwer zugänglicher Literatur zu großem Dank verpflichtet.

30) Coker, E. G., u. Thompson, Some Engineering Problems of Stress Distribution. Proc. of. the First Internat. Congress for Applied Mechanics, Delft, 18—38, 1924.
31) — The Determination of Stresses at a Point in a Plate. Engineering **116**, 512—513, 1923.
32) Czapsky, S., Wied. Ann. **42**, 319 u. f., 1890.
33) Drude, P. und Werthauer, A., Akzidentelle Doppelbrechung in Gehrcke Handb. der phys. Optik, Bd. **1**, 866—882, 1927, Leipzig.
34) Delanghe, G., La Photo-Elasticimétrie, ses applications et ses méthodes. Génie civil, **91**, 243—249, 271—275, 297—304, 1927.
35) English, S. und Turner, W., Journ. Soc. Glass-Techn. **2**, 90, 1920.
36) Filon, N. G. L., The Investigation of Stresses in a Rectangular Bar by Means of polarized light. Phil. Mag. **23**, 1—25, 1912.
37) — On Stresses in Multiply-connected Plates. Rep. Brit. Assoc. f. Advanc. of Science **89**, 305—316, 1921.
38) — On the Graphical Determination of Stress from Photo-Elastic Observations. Engineering, **116**, 511—512, 1923.
39) — u. Coker, siehe unter Coker.
40) — und Jessop, H. T., On the Stress-optical Effect in Transparent Solids Strained beyond the Elastic Limit. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **101**, 165—169, 1922, und Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A **223**, 89—125, 1923.
41) Fletcher, L., Die optische Indicatrix (Deutsche Übers. aus dem Engl. von H. Ambronn und W. König). Leipzig 1893.
42) Föppl, A., Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. **3** und Bd. **5**. Leipzig und Berlin, 10. Aufl. 1927 und 4. Aufl. 1922.
43) Hartmann, L. Distribution des Déformations dans les Métaux soumis à les Efforts. Paris 1896.
44) Haupt, K. und Wächtler, M., Die Homogenität des Kasein-Kunsthorns. „Kunststoffe" **15**, 129—131, 1925.
45) Heymans, P., La Photo-Elasticimétrie, ses Principes, ses Méthodes et ses Applications. Bulletin de la Société Belge des Ingénieurs et des Industriels. **2**, 99—214, 1921, Brüssel.
46) — Photo-Elasticity and its Applications to Engeneering Problems, Tech. Eng. News Mass. Inst. Technology, 80—85, Mai 1922.
47) — und Allis, W. P., The Photoelastic Constants of Celluloid, Glass and Fused Quartz. Bulletin, Massachusetts Institute of Technology **59**, Nr. 64, 216—233, 1924.
48) — und Kimball, A. L., Stress Distribution in Electric Railway Motor Pinions as Determined by the Photo-elastic Method. General Electric Rev. **26**, Nr. 3, 143—153, 1923.
49) — Étude des causes de rupture de constructions-, métalliques au moyen de la lumière polarisée. Revue universelle des mines, (7) **4**, 207—211, 1925.
50) — La Détermination par la Photo-élasticimétrie des Surtensions Dues à certaines Discontinuités Internes et . . . Brüssel 1921.
51) — Bemerkung zur Arbeit des Herrn A. Ramspeck: „Anomalien der akzidentellen Doppelbrechung beim Zelluloid. Ann. d. Phys. (4) **77**, 587—588, 1925.
52) Hönigsberg, O., Über unmittelbare Beobachtung der Spannungsverteilung und Sichtbarmachung der neutralen Schichte an beanspruchten Körpern. Zeitschr. d. östr. Ing. u. Archit.-Vereins Nr. 11, 1904.
53) Hönigsberg, O., Einrichtung für Versuche an beanspruchten durchsichtigen Körpern in polarisiertem Lichte. Ebenda, 1906, Nr. 35.
54) — Unmittelbare Abbildung der neutralen Schichte bei Biegung durchsichtiger Körper in zirkularpolarisiertem Licht. Nichtoffizieller Bericht, internationaler Verband für die Materialprüfungen der Technik. Brüsseler Kongreß 1906.
55) — und Dimmer, G., Interferenzfarben beanspruchter durchsichtiger Körper. Ebenda.
56) Inglis, C. E., Stresses in a Plate due to the Presence of Cracks and sharps Cornes. Transaction of the Institution of Naval Architects **55**, 219—230, 1913.
57) Jakson, A., Spannungslinien bei Berücksichtigung der lokalen Pressung mit Anwendungen für die Praxis. Diss. Karlsruhe 1916.
58) Kämmerer, W., Spannungsmessungen an einer T-förmigen Glasplatte. Staatsexamenarbeit, Phys. Institut Gießen 1927.
59) Köhler, W., Über eine neue Methode zur Messung der Dispersion der Doppelbrechung. Diss. Gießen 1921.
60) König, W., Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten. Ann. d. Phys. (4) **4**, 1—40, 1901.
61) — Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung. Ann. d. Phys. (4) **11**, 842—866, 1903.
62) — Einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen künstlicher Doppelbrechung und Elastizität. Boltzmann-Festschrift 832—838, 1904.
63) — Über einige Fälle künstlicher Doppelbrechung in zylindrischen Körpern. Ann. d. Phys. (4) **52**, 553—607, 1917.
64) — Nachweis elastischer Spannungen in ringförmigen Körpern mit Hilfe künstlicher Doppelbrechung. Elster- u. Geitel-Festschrift 368 bis 380, 1915.
65) — Die Untersuchung von Gläsern in polarisiertem Lichte. Deutsch. opt. Wochenschr. Nr. 1/2, 1—6, 1918.
66) — Einige Beobachtungen über künstliche Doppelbrechung durch Temperaturungleichheit. Physik. Zeitschr. **26**, 45—47, 1925.
67) — Erwiderung auf die Bemerkung des Herrn Paul Heymans zur Arbeit des Herrn A. Ramspeck (51), Ann. d. Phys. **79**, 757—760, 1926.
68) Kronenberg, Referat über die Arbeit (48) von Heymans und Kimball. Zeitschr. d. V. D. I. 641 u. f. 1926.
69) Leick, A., Über künstliche Doppelbrechung und Elastizität von Gelatineplatten. Diss. Greifswald 1903.
70) Léon, Oesterreich. Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst **14**, 1908.
71) Love, A. E. H., Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe, Leipzig u. Berlin, 1907.
72) Maxwell, Cl., On the Equilibrium of Elastic Solids. The Scientific Papers, Vol. I.
73) Mesnager, M., Contribution à l'étude de la Déformation Élastique des Solides. Annales des Ponts et Chausseés **4**, 128—190, 1901.
74) — Détermination complète sur un Modèle réduit des Tensions qui se produiront dans un Ouvrage. Utilisation de la Double Réfraction accidentelle du verre à l'étude des efforts intérieurs dans les solides. Ebenda, **16—18**, 133—186, 1913.

75) Neumann, F., Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in komprimierten oder ungleichförmig erwärmten unkristallinischen Körpern. Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. **54**, 449—476, 1841, u. Ber. d. Verh. d. Berl. Akad. 330—353, 1841.
76) Pockels, F., Über die Änderung des optischen Verhaltens verschiedener Gläser durch elastische Deformation. Ann. d. Phys. (4) **7**, 745 bis 771, 1902; — Lehrbuch der Kristalloptik Leipzig, Berlin 1906; — Referat über die Arbeit (20) von Coker. Beibl. zu den Ann. d. Phys. **35**, 136, 1911.
77) Preston, F. W., A Note on Stress Systems and Photo-elastic Phenomena. (A Contribution to the General Discussion on the Annealing of Glass.) Journ. of the Society of Glass. Technology **11**, 23—29, 1927.
78) Ramspeck, A., Anomalien der akzidentellen Doppelbrechung beim Zelluloid. Ann. d. Phys. (4) **74**, 722—742, 1924. Diss. Gießen.
79) Reeb, O., Über eine Methode zur Messung der Dispersion der künstlichen Doppelbrechung. Ann. d. Phys. (4) **71**, 427—456, 1923. Diss. Gießen.
80) Rieth, H. (geb. Marx), Über die künstliche Doppelbrechung in zylindrischen Glaskörpern bei Einwirkung äußerer Drucke. Ann. d. Phys. (4) **79**, 145—176, 1926. Diss. Gießen.
81) Rossi, P., Rend. d. R. Acad. Napoli 1910.
82) Rühl, D., Experimentelle Ermittlung ebener Verschiebungs- und Spannungszustände auf neuem Wege und Anwendung auf eine durch zwei Nietbolzen gespannte Platte. Forschungsarb. auf dem Geb. d. Ing.-Wes., Heft 221, 1920, V. D. I. Berlin.
83) Savur, S. R., On the Stress Optical Effect in Permanently Overstrained Celluloid. Proc. Roy. Soc. A. **109**, 338—350, 1925.
84) — On the Stress Optical Coefficients for Direct Tension and Pressure measured in the case of Glass. Phil. Mag. Vol. **50**, 453—463, 1925.
85) Schultz, H., Die Bestimmungen der Spannungen in beanspruchten Körpern mit Hilfe polarisierten Lichtes. Der Betrieb, **3**, 405—412, 1921.
86) — Zeitschr. f. Instr. **33**, 205 und 247, 1913.
87) Seebeck, A., Schweigers Journ. VII, 1813, XI, XII, 1814.
88) Siedentopf, H., Über direkte Sichtbarmachung der neutralen Schichten an beanspruchten Körpern. Zeitschr. d. österr. Ing. u. Archit. Vereins **33**, 469—471, 1906.
89) — Mikroskopokular mit Quarzheilkompensator. Zentralbl. f. Mineral. **23**, S. 745, 764, 1906.
90) Steinheil, H., Einige Fälle von Doppelbrechung in kreisförmigen Glasscheiben. Diss. Gießen 1920.
91) Steitz, K., Bestimmung der Differenz der Suszeptibilitäten von Gelatinezylindern mit künstlicher Anisotropie. Diss. Gießen 1922.
92) Szivessy, G., Stand der experimentellen Forschung über die optischen Wirkungen des elektrischen Feldes (mit Ausschluß des Starkeffektes). Jahrb. für Radioaktivität u. Elektronik **16**, 241—283, 1920.
93) Tuzi, Z., A New Material for the Study of Photo-Elasticity. Scientific Papers of the Institut of Physical and Chemical Research, Tokio **7**, 79—96, 1927.
94) — Photo-Elastic Study of Stress on a specimen of three dimensional Form. Ebenda **7**, 97—103, 1927.
95) — Photo-Elastic Study of Stress in heat-treaded Column. Ebenda **7**, 104—120, 1927.
96) Wachtler, M., Über die Beziehung zwischen Doppelbrechung und Dauerdeformation in einigen Gelen. Kolloidchem. Beihefte **20**, 158—208, 1924.
97) — Eine Bemerkung über die optischen Methoden zur Prüfung von Materialbeanspruchungen insbesondere bei Verwendung von Zelluloid. Zeitschr. für techn. Phys. **5**, 418—423, 1924.
98) — Über die Doppelbrechungserscheinungen in Kolloiden. Fortschr. d. Min. **12**, 119—192, 1927.
99) Weidert u. Berndt, Zeitschr. f. techn. Phys. **1**, 51—58, 1920.
100) Weigert, Berichte d. deutsch. phys. Gesellsch. **21**, 479, 615, 623, 1919.
101) Wilson, C., The Influence of Surface Loading on Flexure of Beams. Phil. Mag. **32**, 481—503, 1891.
102) Wyss, Th., Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern und ihre praktische Anwendung. Berlin 1926.

(Eingegangen 6. März 1928.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eisenhaltige Ringe geringer wirksamer Permeabilität.

Von U. Retzow.

In den letzten Jahren ist unsere Kenntnis auf dem Gebiete des Magnetismus durch mehrere bemerkenswerte Feststellungen erweitert worden, ohne daß dabei diese Beobachtungen geeignet sind, dem noch recht wenig einheitlichen Bilde über das Wesen der magnetischen Vorgänge und Zusammenhänge neues Beweismaterial in der einen oder anderen Richtung zuzufügen. Es liegt also auch hier ein Fall vor, in dem die theoretische Behandlung der praktischen Erkenntnis folgen muß.

Hatten bereits seiner Zeit vor ungefähr 30 Jahren die unter diesem Namen bekannten Heuslerschen Aluminium-Mangan-Bronzen[1])

1) F. Heusler, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1904, S. 156; E. Take, Ann. d. Phys. **20**, 849, 1906; Schriften der Marburger Ges. **15**, 299, 1906. — Aus neuerer Zeit: F. Heusler, Zeitschr. f. Phys. 10, 403, 1922. — M. Ostmann, Dissert. Aachen 1927.

(Legierungsbestandteile: *Cu*, *Mn*, *Al*[1])) berechtigtes Aufsehen erregt, die in magnetischer Hinsicht zwar zu keiner praktischen Bedeutung gelangt sind, so muten die in dieser Zeitschrift kürzlich wiedergegebenen und die Angaben von G. Elmen[2]) bestätigenden Hystereseschleifen von U. Meyer[3]) recht eigenartig an. Der auffallende Kurvenverlauf dieses Materials (Legierungsbestandteile: *Ni*, *Fe*, *Co*) ist in diesem Falle durch den Umstand bedingt, daß die Permeabilität beispielsweise bei der angegebenen Legierung von 50 Proz. *Ni*, 30 Proz. *Co* und 20 Proz. *Fe* noch bis zu einer Feldstärke von ungefähr 4 Gauß praktisch als konstant anzusehen ist. Eine technische Anwendung derartiger Legierungen glaubt Elmen nach der angeführten belgischen Patentschrift für einige Sonderausführungen auf dem Gebiete der Niederfrequenz- und Hochfrequenztechnik zu finden. Es wäre auch denkbar, schwach erregte Verstärkertransformatoren auf dieser Grundlage zu entwerfen, die der Einwirkung äußerer Felder entzogen werden sollen.

Den Materialien dieser Gruppe, deren magnetische Eigenschaften durch die Legierung mehrerer paramagnetischer Metalle zustande kommen, stehen die beiden anderen Gruppen gegenüber, bei denen das Eisen zum mindesten einen großen Teil der magnetischen Erregbarkeit übernimmt. Ein grundlegender Unterschied kennzeichnet aber schon von vornherein das verschiedenartige magnetische Verhalten dieser beiden Gruppen: auf der einen Seite die hochpermeablen Legierungen, auf der anderen Seite aber die nur schwach erregbaren Ringe und Massekörper.

Verweilen wir zunächst ganz kurz bei den hochpermeablen Eisen—Nickel-Legierungen, über deren magnetisches Verhalten und technische Ausnutzung uns bereits eine Anzahl von Veröffentlichungen unterrichtet, von denen die bemerkenswertesten in der Fußnote[4]) aufgeführt werden. Dabei stehen wir gleichzeitig vor der auffallenden Erscheinung, daß ungefähr dieselbe Legierungsreihe, die den früher im Schiffs- und Uhrenbau so sehr geschätzten, sogenannten unmagnetischen Nickelstahl[1]) (mit ungefähr 25 bis 27 Proz. *Ni*) liefert, bei größerem Nickelzusatz zu Stoffen der höchsten bisher bekanntgewordenen Permeabilität führt. Die bekanntesten dieser Materialien sind ungefähr die folgenden: das Permalloy[2]) mit 78,2 *Ni* und 21,3 Proz. *Fe*, das englische Mumetall[3]) mit 74 Proz. *Ni*, 20 Proz. *Fe*, 5 Proz. *Cu* und 1 Proz. *Mn*, das amerikanische Nicaloy mit 51 Proz. *Fe* und 49 Proz. *Ni*, das Invariant[4]) mit 47 Proz. *Ni*, das Kruppsche *Br* 50 mit ungefähr gleichem Eisen- und Nickelgehalt, das Hypernik[5]), dessen nähere Zusammensetzung in der genannten Arbeit nicht näher angegeben ist. — Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß diese Materialien einer sehr sorgfältigen Warmbehandlung unterworfen werden müssen, um die günstigsten Eigenschaften in magnetischer Hinsicht zu erzielen.

Die hohe Maximalpermeabilität dieser Materialien, die lediglich durch den Umstand bedingt ist, daß die (nicht allzu hohe) magnetische Sättigung bereits bei sehr geringer Feldstärke, die noch unterhalb der des Erdfeldes liegt, erreicht wird, eignet sich besonders für alle die Fälle, bei denen man es mit sehr geringen erregenden Feldstärken zu tun hat; und diese liegen bekanntlich in der Fernmeldetechnik bei der Überbrückung größerer Reichweiten vor. Hier aber findet sich zugleich auch der Zusammenhang, der die soeben erwähnten hochpermeablen Legierungen mit der folgend zu besprechenden Gruppe verbindet. Denn beide Gruppen, so wesentlich verschieden sie auch in ihren Grundeigenschaften

1) Das *Al* kann auch durch eine Reihe anderer Metalle ersetzt werden.

2) G. Elmen, Belgische Patentschrift 336226.

3) U. Meyer, Physik. Zeitschr. **28**, 919, 1927.

4) T. Yensen, Transact. Amer. Inst. Electr. Eng. 1920, S. 791. — L. Mac Keehan, Phys. Rev. 1923, Nr. 23. — Elektr. Nachr. Techn. 1924, S. 114. — M. Deloraine, Journ. Phys. et Radium **6**, 20, 1925. — K. W. Wagner, Elektrot. Zeitschr. 1925, S. 1581. — J. Würschmidt, Kruppsche Monatshefte 1925, Heft 9, 11, 12. — Elektrot. Zeitschr. 1925, S. 1630. — Bell System Techn. Journ. 1925, S. 355. — Journ. scient. instr. **3**, 24, 1925. — W. Griffiths, The Electrician **97**, 612, 618, 1926. — R. Hiecke, Elektrot. u. Masch.-Bau 1926, S. 49. — W. Kawakami, Scient. Rep. Tohoku Univ. **15**, 215, 1926. — F. Ribbeck, Zeitschr. f. Phys. **38**, 772, 1926. — T. Spooner, Journ. Amer. Inst. Electr. Eng. 1926, S. 540. — A. Jung, Zeitschr. f. Krist. **65**, 309, 1927. — R. Appleyard, Electr. Rev. **102**, 715, 1928. — Electr. Rev. **102**, 816, 1928. — Iron Age **121**, 534, 1928.

1) Ch. Guillaume, Les aciers au nickel et leurs applications à l'horlogerie. Paris 1912. — Tätigkeitsbericht der Physikal.-Techn. Reichsanstalt vom Jahre 1913 u. 1914.

2) T. Yensen, a. a. O. — H. Arnold u. G. Elmen, Journ. Franklin Inst. **195**, 621, 1923. — H. Arnold, The Electrician **96**, 669, 672, 1923. — E. Crapper, Engineering 1924, S. 452. — D. Binnie, Journ. Roy. Techn. Coll. Glasgow 1925, Dez. — O. Buckley u. L. Mac Keehan, Phys. Rev. **26**, 261, 1925. — K. W. Wagner, a. a. O. — T. Yensen, Journ. Franklin Inst. **199**, 333, 1925. — Elektrot. Zeitschr. 1925, S. 1630. Elektrot. Anzeiger 1925, S. 331. — R. Forster, Physik. Zeitschr. **27**, 829, 1926. — H. Freese, Zeitschr. f. Hochfrequenztechnik **27**, 86, 1926. — W. Griffiths, a. a. O. — J. Gilbert, Bell System Techn. Journ. 1927, Heft 3. — L. Mac Keehan u. P. Cioffi, Phys. Rev. **28**, 146, 1926. — L. Mac Keehan, Phys. Rev. **28**, 158, 1928.

3) H. Freese, a. a. O. — W. Philips, The Electrician **98**, 92, 1927. — K. Edgcumbe u. F. Ockenden, Journ. Inst. Electr. Eng. **65**, 553, 1927.

4) K. W. Wagner, a. a. O.

5) Spooner, a. a. O.

Tabelle I.

Magnetische Aufnahme verschiedener Pupinspulen.

Feldstärke	Ringdrahtkern				Massekern				Querdraht-Kern	
	7) weicher Eisendraht		6) harter Stahldraht		4) mech. zerkl. Eisen		2) elektrolyt. Eisen		10) harter Stahldraht	
$\mathfrak{H}$ cgs	$\mathfrak{B}$ cgs	μ	$\mathfrak{B}$ cgs	μ	$\mathfrak{B}$ cgs	μ	$\mathfrak{B}$ cgs	μ	$\mathfrak{B}$ cgs	μ
0,5	57	125	39	78	26	52	20	40		
1,0	160	160	83	83	53	53	41	41	11	$11_{,4}$
3,0	1170	390	306	102	165	55	129	43	34	$11_{,3}$
5,0	3200	639	665	133	295	59	225	45	58	$11_{,4}$
10	6240	624	3630	363	750	75	510	51	118	$11_{,8}$
15	7140	483	6370	425	1500	100	840	56	180	$12_{,0}$
20	7900	395	7700	385	2280	114	1200	60	241	$12_{,0}$
40	8800	220	9520	238	4640	116	2720	65	470	$11_{,8}$
60	9300	155	10260	171	6180	103	3780	63	695	$11_{,6}$
80	9600	120			7200	90	4880	61		
60	9490				6650		4150			
40	9100		9980		5780		3510		499	
20	8520		9160		4590		2720		283	
15	8220		8820		4070		2180		227	
10	7750		8390		3550		1830		166	
5,0	7040		7730		2950		1480		107	
3,0	6620		7490		2690		1370		80	
1,0	6030		7140		2400		1240		58	
0,5	5850		7030		2340		1190		50	
0	5630		6900		2270		1130		44	
— 0,5	5380		6840		2200		1090		39	
— 1,0	5070		6760		2120		1050		32	
— 3,0	2600		6310		1770		880		10	
— 5,0	— 3100		5680		1400		720		— 28	
— 10	— 6200		— 990		360		— 40		— 102	
— 15	— 7200		— 5970		— 610		— 480		— 165	
— 20	— 7860		— 7610		— 1630		— 1000		— 230	
— 40	— 8800		— 9520		— 4610		— 2650		— 470	
— 60	— 9300		— 10260		— 6180		— 3780		— 695	
— 80	— 9600				— 7200		— 4880			

sind, werden in technischer Hinsicht derselben Aufgabe dienstbar gemacht, nämlich für die Verbesserung der Nachrichtenübermittelung auf weite Entfernungen.

Zur Erreichung dieses Zieles sucht man die Dämpfung der Leitung dadurch herabzusetzen, daß man der Leitung bzw. dem Kabel eine zusätzliche Selbstinduktion gibt in dem Maße, daß die Dämpfung bei Berücksichtigung des zusätzlichen Wirkwiderstandes der Selbstinduktion nahezu den günstigsten Wert erreicht. Zu diesem Zwecke wird nach den von Krarup aufgestellten Grundsätzen das Kabel mit einem dünnen Eisendraht oder -band aus magnetisch weichem Material umwickelt; dieses Verfahren[1]), für das gerade die Verwendung der hochpermeablen Legierungen ganz wesentliche Vorteile bietet, hat besonders im transozeanischen Kabelverkehr recht umfangreiche Verwendung gefunden. Auf ganz anderer Grundlage wird die erforderliche Erhöhung der Selbstinduktion in der Ausführung von Pupin erreicht. In die pupinisierten Leitungen und Kabel werden in regelmäßigen Abständen besondere eisenhaltige Induktionsspulen eingeschaltet, wofür sich in neuerer Zeit die sogenannten Massekerne sehr gut bewährt haben.

Welche Gesichtspunkte den Praktiker zu der umfangreichen Verwendung dieser Massekerne geführt haben, wurde von W. Ehlers[1]) in der untenbezeichneten Arbeit mit großer Offenheit dargelegt. Soweit aber bekannt, sind bisher Einzelheiten über die magnetischen Eigenschaften derartiger Ringkörper noch nicht veröffentlicht worden. Hierzu dürfte aber die folgende Auswahl aus recht umfangreichen Versuchsreihen um so geeigneter sein, als die Ergebnisse zugleich in gewisser Weise auch den Einfluß des verwendeten Materials für die betreffende Anordnung erkennen lassen.

Von den untersuchten Ringkörpern besaßen die Proben 7) und 6) einen kreisförmigen Querschnitt von 8,4 cm² bei 12 cm mittleren Durchmessers, die Proben 4) und 2) 7,6 cm² und 8,1 cm

1) Salinger, Arch. f. Elektrot. **12**, 268, 1923. — K. W. Wagner, a. a. O. — J. Gilbert, a. a. O.

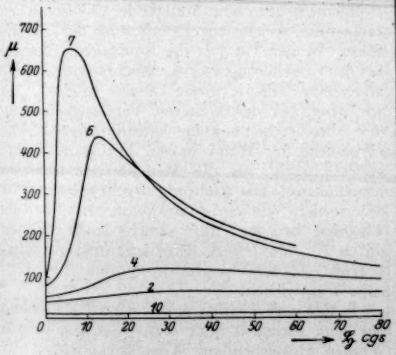
1) W. Ehlers, Zeitschr. techn. Phys. 1924, S. 589; AEG-Mitteilg. 1925, S. 240; Elektr. Nachr. Techn. 1925, S. 121.

Tabelle II.

Wirksame Maximalpermeabilität von hochpermeablen Legierungen, Draht- und Massekernen.

Gruppe	Bezeichnung	Bestandteile	Größenordnung der maximalen Permeabilität
I.	Eisen—Nickel-Legierungen	*Ni, Fe,* [*Cu, Mn*]	$x \cdot 10^4$
II.	a) Elmen-Bronzen	*Ni, Co, Fe,* [*Mn*]	$x \cdot 10^3$
	b) Heusler-Bronzen	*Cu, Al, Mn*	$x \cdot 10^1 \div x \cdot 10^2$
III.	a) Ringdraht-Kerne	Eisen- und Stahldraht	$x \cdot 10^2$
	b) Masse-Kerne	Eisenpulver in isolierender Substanz	$x \cdot 10^1 \div x \cdot 10^2$
	c) Querdraht-Kerne	Eisen- und Stahldraht	$x \cdot 10^1$

und die Probe 10) 8,6 cm² und 17 cm. Die magnetische Aufnahme der Hystereseschleife geschah nach dem bekannten ballistischen Verfahren und zeitigte Werte, die im einzelnen aus der beigefügten Tabelle I zu entnehmen sind. Neben diesen Zahlenwerten veranschaulicht die in der Figur



gegebene zeichnerische Darstellung der wirksamen Permeabilität in augenfälliger Weise die großen Unterschiede, die zwischen den hier behandelten Pupinspulen bestehen.

Gehen wir nun zu den Ergebnissen im einzelnen über, so tritt zunächst bei den früher üblichen Ringdrahtkernen, bei denen der verwendete Eisendraht ringförmig in der Richtung der erzeugenden Feldlinien liegt, der Einfluß eines magnetisch weichen Materials ohne weiteres in die Erscheinung. Der Prüfkörper 7), der aus weichgeglühtem Eisendraht von 0,15 mm Durchmesser mit einem Kohlenstoffgehalt von 0,05 bis 0,1 Proz. besteht, weist im Gegensatz zu dem aus magnetisch hartem Material bestehendem Prüfkörper 6), für den harter Stahldraht gleicher Stärke mit einem Kohlenstoffgehalt bis zu 1 Proz. zur Verwendung kam, eine viel geringere Koerzitivkraft auf, daher auch eine höhere wirksame Maximalpermeabilität, die bei geringerer Feldstärke erreicht wird. Die Tatsache, daß sich die beiden Vergleichskörper auf Material derselben Stärke beziehen, macht den Vergleich noch offensichtlicher.

Die Werte der Maximalpermeabilität und auch der erreichbaren Sättigung liegen bei den Ringdrahtkernen noch verhältnismäßig hoch, da man es hier mit Körpern zu tun hat, bei denen der Eisenweg noch ein geschlossenes Ganzes bildet und daher der Einfluß der Streuung keine ausschlaggebende Rolle spielt. Herabsetzend auf die Größe der Sättigung wirkt lediglich der Umstand, daß nicht ein massiver Eisenring vorliegt, sondern der sogenannte Füllfaktor den tatsächlichen Anteil des Eisendrahtes zu dem in Rechnung gesetzten Ringquerschnitt bestimmt.

Wesentlich geringer fallen die magnetischen Eigenschaften der sogenannten Massekerne auf. Das Material dieser Körper besteht aus sehr fein verteiltem Eisenpulver, dessen Einzelteile mit einer dünnen isolierenden Schicht aus Harz oder Glas überzogen und dadurch der direkten Berührung entzogen sind. Unter Anwendung hohen Druckes[1]) wird diese Masse in die gewünschte Form gepreßt, die eine für diese Verhältnisse recht hohe innere Festigkeit besitzt. Weitere Einzelheiten über die Fertigung dieser Massekerne mögen aus der bereits erwähnten Veröffentlichung von W. Ehlers[2]) entnommen werden. In diesen Massekernen liegt nun ein geschlossener Eisenweg überhaupt nicht mehr vor; die Folge ist ein überwiegender Einfluß der Streuung auf die magnetischen Werte, die keine hohe Sättigung mehr erreichen läßt und dadurch auch die maxi-

1) W. Ehlers, Zeitschr. techn. Phys. 1924, S. 589; AEG-Mitteilg. 1925, S. 240; Elektrot. Nachr. Techn. 1925, S. 121.

2) W. Ehlers u. F. Falkenberg, Elektrot. Nachr. Techn. 1926, S. 281.

male Erregbarkeit auf ziemlich geringe Beträge herabsetzt. In der beigefügten Tabelle findet man eine Gegenüberstellung der magnetischen Werte solcher Massekörper bei Verwendung von mechanisch zerkleinertem Eisenpulver (Probekörper 4) und elektrolytisch niedergeschlagenem Eisen (Probe 2). Ein Vergleich der betreffenden Spalten dieser Tabelle läßt vom rein magnetischen Standpunkt aus betrachtet das etwas hochwertigere Verhalten des auf mechanischem Wege zerkleinerten Eisenpulvers erkennen. Will man hieraus einen Rückschluß auf die Formgebung der betreffenden Eisenteilchen zulassen, so nötigt die Auffassung über die Streuung zu der Ansicht, daß das elektrolytisch niedergeschlagene Eisen in kleineren Einzelteilchen zur Verarbeitung kommt als das auf mechanischem Wege zerkleinerte Eisenpulver.

Den günstigsten Fall in bezug auf die Streuung stellen nun ohne Zweifel die sogenannte Querdrahtkerne dar, bei denen der verwendete Eisendraht gewissermaßen in Form einzelner Stäbchen senkrecht zur erregenden Feldrichtung steht. Sowohl der oben erwähnte Füllfaktor wie auch der Entmagnetisierungsfaktor der im Verhältnis zu ihrem Durchmesser recht kurzen Stäbchen spielt hierbei die ausschlaggebende Rolle. Die erreichbare Sättigung ist nicht viel mehr als proportional der erregenden Feldstärke, die wirksame Permeabilität aber in dem untersuchten Gebiet mit großer Annäherung als konstant zu betrachten. Auf die Weise sind derartige Spulen geeignet, den Einfluß äußerer Felder unschädlich zu machen, da wesentliche Induktionsänderungen der Spulen vermieden werden.

Bei den durchgeführten Untersuchungen konnte ein Unterschied zwischen verschiedenem Drahtmaterial bei den Querdrahtkernen nicht mehr mit Sicherheit festgelegt werden und hat daher auch in der Tafel keinen Platz gefunden. Der Probekörper 10) bestand aus dem gleichen Drahtmaterial wie die Probe 6) mit einem Drahtdurchmesser von 0,1 mm.

Einen zusammenfassenden Überblick über die hier erwähnten Materialien gewährt die vorstehende Tabelle II, in der die einzelnen Gruppen der Größenordnung ihrer maximalen Erregbarkeit nach aufgeführt sind und x jedesmal einen einstelligen Beiwert bedeutet.

(Eingegangen 21. Mai 1928.)

Über eine formale Erweiterung der Relativitätstheorie und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Elektrizität.

Von Kanae Hattori.

Übersicht.

Durch formale Erweiterung der kovarianten Ableitung wird ein Tensor, welcher die Maxwellsche Feldgleichung erfüllt, gefunden und mit dem elektromagnetischen Tensor identifiziert. Das Gesetz der mechanischen Wirkung des Elektromagnetismus usw. wird durch geeignete Variationsgleichungen abgeleitet. Die Form der Feldgleichung usw. ist von der gewöhnlichen etwas verschieden, doch wird sie durch geeignete Umformung auf die gewöhnliche gebracht.

Einleitung.

Die weitere Verallgemeinerung der heute allgemein als „allgemeine Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie ist heute noch nicht vollständig geleistet. Der schwierige Punkt des Problems liegt in dem Mangel der physikalischen Hypothese, welche zur Erweiterung der Theorie führt. In der Tat hat die Äquivalenzhypothese bei der Erweiterung von der beschränkten auf die allgemeine Theorie große Dienste geleistet. Da wir aber bei der weiteren Verallgemeinerung der Theorie, heute keine leitende physikalische Hypothese zur Hand haben, bleibt uns nichts anderes übrig, als die Methode der formalen Erweiterung. Die Richtung der Erweiterung ist daher nicht eindeutig bestimmt, und manche Theorien wurden auf verschiedenen Wegen durch H. Weyl[1]), A. Eddington[2]), A. Einstein[3]), E. Reichenbächer[4]) und Th. Kaluza[5]) entwickelt.

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem auf dem formalen aber etwas von den obigen Werken abweichendem Wege behandelt.

In dieser Arbeit wird angenommen, daß der physikalische Zustand eines Weltpunktes durch 16 Größen $h_{\lambda\mu}$ vollständig bestimmt wird, welche

1) H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. **59**, 101, 1919.

2) A. S. Eddington, A Generalisation of Weyl's theory usw. Proc. Roy. soc. **99**, 104, 1921.

3) A. Einstein, Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. Berliner Berichte 1925, S. 414—419.

4) E. Reichenbächer, Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und Gravitation. Ann. d. Phys. **52**, 134, 1917.
E. Reichenbächer, Eine neue Erklärung des Elektromagnetismus. Zeitschr. f. Phys. **13**, 221, 1923.
E. Reichenbächer, Die Mechanischen Gleichungen im elektromagnetischen Felde. Zeitschr. f. Phys. **33**, 916, 1925.

5) Th. Kaluza, Zum Unitätsproblem der Physik. Berliner Berichte 1921, S. 966.

sich bei der Koordinatentransformation wie ein Tensor verhalten. Hier bedeutet $g_{\lambda\mu}$ (der symmetrische Teil von $h_{\lambda\mu}$) wie gewöhnlich das Gravitationspotential, dagegen identifizieren wir $f_{\lambda\mu}$ (den antisymmetrischen Teil von $h_{\lambda\mu}$) nicht mit dem elektromagnetischen Tensor. In bezug auf den Tensor $f_{\lambda\mu}$ ist in dieser Theorie vorläufig nichts anderes vorausgesetzt, als daß er einen dynamischen Zustand (im Gegensatz zur Annahme, daß $g_{\lambda\mu}$ eine geometrische, kinematische Größe ist) darstellt.

Der Ausgangspunkt dieser Theorie ist eine formale Erweiterung der kovarianten Differentiation durch den Gebrauch von $h_{\lambda\mu}$ anstatt $g_{\lambda\mu}$. Durch die Anwendung dieser Differentiation wird ein Tensor $H^{\nu}_{\lambda\mu\nu}$, sowie sein verjüngter Tensor $H_{\lambda\mu}$ gebildet. Die hier erweiterte kovariante Differentiation ist ein mathematisches Hilfsmittel für die Bildung neuer Welttensoren und keine geometrische Interpretation wird berücksichtigt.

Der antisymmetrische Teil von $H_{\lambda\mu}$ (mit $F_{\lambda\mu}$ bezeichnet) erfüllt ein Gleichungssystem, welches als erweiterte Maxwellsche Feldgleichung interpretiert wird, und diesen antisymmetrischen Teil haben wir aus diesem Grunde mit dem elektromagnetischen Tensor identifiziert. Die Form der Feldgleichung ist in dieser Theorie von der gewöhnlichen verschieden, doch kann sie durch geeignete Umformung auf die gewöhnliche Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke werden einige Sätze über antisymmetrische Tensoren aufgestellt. Der Materie-Energie-Tensor wird durch die Hamiltonsche Methode ($g_{\lambda\mu}$ als unabhängige Variable genommen) abgeleitet. In dieser Theorie ist es festgestellt, daß die Materie elektromagnetischen Ursprungs ist, und daher ist es nur künstlich, daß wir den Materie-Energie-Tensor in zwei Teile teilen. Aber wir haben ihn in die mechanischen und elektromagnetischen Teile geteilt, wie man dies gewöhnlich tut. Auf diese Weise wird die Eigenschaft des Materie-Energie-Tensors, divergenzfrei zu sein, als Gesetz der mechanischen Wirkung des Elektromagnetismus aufgefaßt.

Durch weitere Anwendung der Hamiltonschen Methode ($f_{\lambda\mu}$ als unabhängige Variable angenommen) wird eine Gleichung abgeleitet, welche elektromagnetische Tensoren miteinander verbindet. Dieses Ergebnis kann man nicht direkt durch das Experiment prüfen, aber dies wird erst nötig sein, wenn wir das Problem des Elektrons studieren.

1. Die verallgemeinerten Dreiindizessymbole und die verallgemeinerte kovariante Differentiation.

Wir erweitern das Dreiindizessymbol erster Art durch die Formel:

$$*[\lambda\mu,\nu] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}\right). \quad (1.1)$$

Sein Transformationsgesetz läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$*[\lambda\mu,\nu]' = *[\alpha\beta,\gamma]\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}. \quad (1.2)$$

was bewiesen werden kann:

Da

$$h'_{\nu\lambda} = h_{\gamma\alpha}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda} \qquad h'_{\mu\nu} = h_{\beta\gamma}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu}$$

$$h'_{\mu\lambda} = h_{\beta\alpha}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}$$

sind, so haben wir

$$\frac{\partial h'_{\nu\lambda}}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial h_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + h_{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 x_\gamma}{\partial x'_\nu \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda} + h_{\gamma\alpha}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} \quad (1.3)$$

Nach zyklischer Vertauschung der Summationsbuchstaben α, β, γ in den letzten zwei Gliedern der rechten Seite:

$$\frac{\partial h'_{\gamma\lambda}}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial h_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu}.$$

In ähnlicher Weise haben wir:

$$\frac{\partial h'_{\mu\nu}}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\nu \partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \quad (1.4)$$

und

$$\frac{\partial h'_{\mu\lambda}}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + h_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\mu \partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} \quad (1.5)$$

Aus (1,3), (1,4), (1,5) und (1,1) erhalten wir: $*[\lambda\mu,\nu]'$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x_\gamma}\right)\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + h_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} + \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}\right)$$

$$= *[\alpha\beta,\gamma]\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + \tfrac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha})\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}$$

$$= *[\alpha\beta,\gamma]\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu},$$

da

$$\tfrac{1}{2}(h_{\alpha\beta}+h_{\beta\alpha})=g_{\alpha\beta}$$

ist.

Dann definieren wir das Dreiindizessymbol zweiter Art durch die Formel:

$$*\{\lambda\mu,\nu\}=g^{\varrho\nu}*[\lambda\mu,\varrho]. \tag{1.6}$$

Unter Heranziehung obiger Relation wollen wir die verallgemeinerten kovarianten Ableitungen definieren. Aus (1,2) erhalten wir, indem wir die beiden Seiten mit $g'^{\varrho\nu}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}$ multiplizieren.

$$*[\lambda\mu,\varrho]'g'^{\varrho\nu}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}=g_{\alpha\beta}g'^{\varrho\nu}\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\varrho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}+*[\alpha\beta,\gamma]\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\varrho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}g'^{\varrho\nu}.$$

Da

$$g'^{\varrho\nu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\varrho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}=g^{\beta\varepsilon}\qquad g'^{\varrho\nu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\varrho}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}=g^{\gamma\varepsilon}$$

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\varepsilon}=g^\varepsilon_\alpha$$

sind, so bekommen wir mit Rücksicht auf (1,6)

$$*\{\lambda\mu,\nu\}'\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}=g^\varepsilon_\alpha\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}+*\{\alpha\beta,\varepsilon\}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}$$

$$=\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}+*\{\alpha\beta,\varepsilon\}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} \tag{1.7}$$

Bezeichnet man nun irgendeinen kovarianten Vektor mit A_λ, so haben wir

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}A_\varepsilon+\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}\frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_\varkappa},$$

weil

$$A'_\lambda=\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda}A_\varepsilon$$

ist. Durch Änderung der Summationsbuchstaben in dem letzten Glied der rechten Seite, bekommen wir:

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\lambda\partial x'_\mu}A_\varepsilon+\frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\varkappa}.$$

Aus (1.7)

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}\left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\varkappa}-*\{\varrho\varkappa,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)+*\{\lambda\mu,\nu\}'A_\varepsilon\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}.$$

Daher gilt die Relation

$$\frac{\partial A'_\lambda}{\partial x'_\mu}-*\{\lambda\mu,\nu\}'A'_\nu=\frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}\left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\varkappa}-*\{\varrho\varkappa,\varepsilon\}A_\varepsilon\right), \tag{1.8}$$

wobei wir die Relation

$$A'_\nu=\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\nu}A_\varepsilon$$

benutzten. Benutzen wir die Bezeichnung

$$*\nabla_\mu A_\lambda=\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}-*\{\lambda\mu,\nu\}A_\nu \tag{1.9}$$

so erhalten wir aus (1,8)

$$*\nabla_\mu A'_\lambda=\frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\varkappa}{\partial x'_\mu}*\nabla_\varkappa A_\varrho.$$

Daher ist $*\nabla_\mu A_\lambda$ ein Tensor, welcher als die verallgemeinerte kovariante Ableitung von A_λ bezeichnet wird. Man kann leicht beweisen, daß die verallgemeinerte kovariante Ableitung eines Tensors eine ähnliche Form wie die gewöhnliche kovariante Ableitung besitzt, zum Beispiel[1]):

$$*\nabla_\nu T_{\lambda\mu}=\frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-*\{\lambda\nu,\varrho\}T_{\varrho\mu}-*\{\mu\nu,\varrho\}T_{\lambda\varrho}. \tag{1.10}$$

2. Der verallgemeinerte Riemann-Christoffelsche Tensor.

Bezeichnet man irgendeinen kovarianten Vektor mit A_λ, so bekommen wir aus (1.9) und (1.10):

$$*\nabla_\nu *\nabla_\mu A_\lambda=\frac{\partial *\nabla_\mu A_\lambda}{\partial x_\nu}-*\{\lambda\nu,\varrho\}*\nabla_\mu A_\varrho-*\{\mu\nu,\varrho\}*\nabla_\varrho A_\lambda. \tag{2.1}$$

$$*\nabla_\nu *\nabla_\mu A_\lambda=\frac{\partial}{\partial x\nu}\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}-*\{\lambda\mu,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)-*\{\lambda\nu,\varrho\}\left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\mu}-*\{\varrho\mu,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)-*\{\mu\nu,\varrho\}*\nabla_\varrho A_\lambda.$$

Durch Vertauschung der Zeiger μ und ν erhalten wir:

$$*\nabla_\mu *\nabla_\nu A_\lambda=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu}-*\{\lambda\nu,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)-*\{\lambda\mu,\varrho\}\left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial x_\nu}-*\{\varrho\nu,\varepsilon\}A_\varepsilon\right)-*\{\nu\mu,\varrho\}*\nabla_\varrho A_\lambda \tag{2.2}$$

Aus (2.1) und (2.2) bekommen wir

$$(*\nabla_\nu *\nabla_\mu-*\nabla_\mu *\nabla_\nu)A_\lambda=-\left(*\{\mu\nu,\varrho\}-*\{\nu\mu,\varrho\}\right)*\nabla_\varrho A_\lambda+\left(*\{\lambda\nu,\varrho\}*\{\varrho\mu,\varepsilon\}-*\{\lambda\mu,\varrho\}*\{\varrho\nu,\varepsilon\}+\frac{\partial}{\partial x_\mu}*\{\lambda\nu,\varepsilon\}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}*\{\lambda\mu,\varepsilon\}\right)A_\varepsilon. \tag{2.3}$$

Nun wollen wir zeigen, daß der Koeffizient von A_ε in (2.3) ein Tensor ist. Betrachten wir zuerst $*\{\mu\nu,\varrho\}$, dann ergibt sich die folgende Relation durch Trennung von $h_{\lambda\mu}$ in den symmetrischen und antisymmetrischen Teil[1]),

$$*\{\mu\nu,\varrho\}=g^{\varrho\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\varepsilon\mu}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varepsilon}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{\varepsilon\mu}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial f_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial f_{\nu\mu}}{\partial x_\varepsilon}\right)\right],$$

1) Siehe Anhang.

wegen Antisymmetrie von $f_{\mu\nu}$, bekommen wir

$$*\{\mu\nu,\varrho\} = g^{\varrho\varepsilon}\left\{[\mu\nu,\varepsilon] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\varepsilon} + \frac{\partial f_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\varepsilon\mu}}{\partial x_\nu}\right)\right\} = \{\mu\nu,\varrho\} + \tfrac{1}{2} f_{\mu\nu}{}^{\varrho}, \tag{2.4}$$

wobei

$$f_{\mu\nu\varepsilon} = \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\varepsilon} + \frac{\partial f_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\varepsilon\mu}}{\partial x_\nu}$$

und

$$f_{\mu\nu}{}^{\varrho} = g^{\varrho\varepsilon} f_{\mu\nu\varepsilon}$$

gesetzt werden. Aus (2.4) haben wir

$$*\{\mu\nu,\varrho\} - *\{\nu\mu,\varrho\} = \tfrac{1}{2}(f_{\mu\nu}{}^{\varrho} - f_{\nu\mu}{}^{\varrho}) = f_{\mu\nu}{}^{\varrho}.$$

Da $f_{\mu\nu\varepsilon}$ ein Tensor ist, und $f_{\mu\nu}{}^{\varrho}$ folglich ein Tensor ist, so ist das erste Glied in der rechten Seite von (2.3) auch ein Tensor. Die linke Seite ist ein Tensor, und daher ist der Koeffizient von A_ε auch ein Tensor. Wir wollen ihn mit $H^{\varepsilon}_{\lambda\mu\nu}$ bezeichnen, das heißt:

$$H^{\varepsilon}_{\lambda\mu\nu} = *\{\lambda\nu,\varrho\}*\{\varrho\mu,\varepsilon\} - *\{\lambda\mu,\varrho\}*\{\varrho\nu,\varepsilon\} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}*\{\lambda\nu,\varepsilon\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}*\{\lambda\mu,\varepsilon\}. \tag{2.5}$$

Der verjüngte Riemann-Christoffelsche Tensor wird gebildet, indem man $\varepsilon = \nu$ in (2.5) setzt. Er wird mit $H_{\lambda\mu}$ bezeichnet, das heißt:

$$H_{\lambda\mu} = *\{\lambda\nu,\varrho\}*\{\varrho\mu,\nu\} - *\{\lambda\mu,\varrho\}*\{\varrho\nu,\nu\} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}*\{\lambda\nu,\nu\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}*\{\lambda\mu,\nu\} \tag{2.6}$$

ist[1]). Durch Trennung von $h_{\lambda\mu}$ in $g_{\lambda\mu}$ und $f_{\lambda\mu}$ bekommen wir nach (2.4)

$$\begin{aligned} H_{\lambda\mu} = {} & [\{\lambda\nu,\varrho\} + \tfrac{1}{2} f_{\lambda\nu}{}^{\varrho}][\{\varrho\mu,\nu\} + \tfrac{1}{2} f_{\varrho\mu}{}^{\nu}] \\ & - [\{\lambda\mu,\varrho\} + \tfrac{1}{2} f_{\lambda\mu}{}^{\varrho}][\{\varrho\nu,\nu\} + \tfrac{1}{2} f_{\varrho\nu}{}^{\nu}] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\mu}[\{\lambda\nu,\nu\} + \tfrac{1}{2} f_{\lambda\nu}{}^{\nu}] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_\nu}[\{\lambda\mu,\nu\} + \tfrac{1}{2} f_{\lambda\mu}{}^{\nu}]. \end{aligned}$$

Da wegen Antisymmetrie von $f_{\lambda\nu\varrho}$

$$f_{\lambda\nu}{}^{\nu} = g^{\varrho\nu} f_{\lambda\nu\varrho} = 0$$

ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} H_{\lambda\mu} = {} & \{\lambda\nu,\varrho\}\{\varrho\mu,\nu\} - \{\lambda\mu,\varrho\}\{\varrho\nu,\nu\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\lambda\nu,\nu\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\lambda\mu,\nu\} + \tfrac{1}{4} f_{\lambda\nu}{}^{\varrho} f_{\varrho\mu}{}^{\nu} \\ & - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} f_{\lambda\mu}{}^{\nu} + \{\varrho\nu,\nu\} f_{\lambda\mu}{}^{\varrho} - \{\lambda\nu,\varrho\} f_{\varrho\mu}{}^{\nu} \right. \\ & \left. - \{\varrho\mu,\nu\} f_{\lambda\nu}{}^{\varrho}\right] = R_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{4} K_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2} F_{\lambda\mu}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

[1]) $h_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + f_{\lambda\mu}$.

wobei

$$R_{\lambda\mu} = \{\lambda\nu,\varrho\}\{\varrho\mu,\nu\} - \{\lambda\mu,\varrho\}\{\varrho\nu,\nu\} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{\lambda\nu,\nu\} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\lambda\mu,\nu\} \tag{2.8}$$

$$K_{\lambda\mu} = f_{\lambda\nu}{}^{\varrho} f_{\varrho\mu}{}^{\nu} \tag{2.9}$$

$$F_{\lambda\mu} = -\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} f_{\lambda\mu}{}^{\nu} + \{\varrho\nu,\nu\} f_{\lambda\mu}{}^{\varrho} - \{\lambda\nu,\varrho\} f_{\varrho\mu}{}^{\nu} - \{\varrho\mu,\nu\} f_{\lambda\nu}{}^{\varrho}\right] = -\nabla_\nu f_{\lambda\mu}{}^{\nu} \tag{2.10}$$

gesetzt, und mit ∇_ν die gewöhnlichen kovarianten Ableitungen bezeichnet werden.

3. Der elektromagnetische Tensor.

Da nach (2.10)

$$F^{\lambda\mu} = g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} F_{\alpha\beta} = -g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} \nabla_\nu f_{\alpha\beta}{}^{\nu} = -\nabla_\nu f^{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sqrt{-g} f^{\lambda\mu\nu}$$

ist, so bekommen wir wegen Antisymmetrie von $f^{\lambda\mu\nu}$ die folgende Relation

$$\nabla_\mu F^{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g} F^{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(\sqrt{-g} f^{\lambda\mu\nu}) = 0. \tag{3.1}$$

Setzen wir zunächst

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = F_{\lambda\mu\nu}, \tag{3.2}$$

so ist $F_{\lambda\mu\nu}$ ein vollständig antisymmetrischer Tensor, welcher nur vier unabhängige Komponenten besitzt. Der Tensor erfüllt die folgende Relation, welche nichts anderes als das Erhaltungsgesetz ist[1]).

$$-\frac{\partial F_{123}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{234}}{\partial x_1} - \frac{\partial F_{341}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{412}}{\partial x_3} = 0. \tag{3.3}$$

Im Falle der ebenen Raumzeit gehen die Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.3) in die elektromagnetischen Feldgleichungen der speziellen Relativitätstheorie über, wenn wir mit $F_{\lambda\mu}$ den elektromagnetischen Tensor und mit $F_{\lambda\mu\nu}$ die Tensoren der Strom-Ladungsdichte bezeichnen, wie wir später sehen werden. Überdies spielen diese Tensoren dieselbe Rolle wie die elektromagnetische Kraft und der elektrische Strom im Gesetz der mechanischen Wirkungen des elektromagnetischen Feldes, wie wir später beweisen werden. Aus obigem Grunde identifizieren wir $F_{\lambda\mu}$ und $F_{\lambda\mu\nu}$ bzw. mit dem elektromagnetischen und dem Tensor der elektrischen Stromladungsdichte,

[1]) Laue, Die Relativitätstheorie Bd. II, S. 84, 1921.

und interpretieren die Gleichungen (3.1) und (3.2) als Feldgleichungen. Der elektromagnetische Tensor ist in dieser Arbeit nicht aus dem Vektorpotential ableitbar, wie in der gewöhnlichen Theorie, sondern aus dem Tensorpotential $f_{\lambda\mu}$.

4. Das Wirkungsprinzip I.

Mit dem Tensor $H_{\lambda\mu}$ und dem Tensor $(g^{\lambda\mu} + \alpha^2 F^{\lambda\mu})$ bilden wir die folgende Invariante W, wobei α^2 eine Konstante ist:

$$W = (g^{\lambda\mu} + \alpha^2 F^{\lambda\mu}) H_{\lambda\mu} \tag{4.1}$$

nach (2.7)

$$= g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{4} g^{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2} \alpha^2 F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}.$$

Nun wollen wir das Gravitationsgesetz, das Gesetz der mechanischen Wirkungen des elektromagnetischen Feldes und den Materie-Energie-Tensor durch die Annahme

$$\delta \int W \sqrt{-g}\, d\tau \overset{!}{=} 0^{1}) \tag{4.2}$$

ableiten, wobei $g_{\lambda\mu}$ als unabhängige Variable angenommen und festgesetzt wird, daß ihre Variation am Rande verschwindet. Nun wollen wir die Gleichung (4.2) gliedweise berechnen.

Zuerst betrachten wir das zweite Glied von (4.2)

$$\delta \int g^{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau = \int \{ K_{\lambda\mu}\, \delta (g^{\lambda\mu} \sqrt{-g}) + g^{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, \delta K_{\lambda\mu} \} d\tau. \tag{4.3}$$

Da

$$\delta \sqrt{-g} = \tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \tag{4.a}$$

und

$$\delta g^{\lambda\mu} = - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} \delta g_{\alpha\beta} \tag{4.b}$$

sind[2]), so haben wir

$$\begin{aligned} K_{\lambda\mu} \delta (g^{\lambda\mu} \sqrt{-g}) &= \tfrac{1}{2} K_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu} g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta} \\ &\quad - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} K_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta} \\ &= - (K^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} K) \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei $K = g^{\lambda\mu} K_{\lambda\mu}$ gesetzt wird.

Aus (2.9) erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta K_{\lambda\mu} &= \delta (f_{\lambda\nu}{}^{\varrho} f_{\varrho\mu}{}^{\nu}) = \delta (g^{\varrho\iota} g^{\nu\varkappa} f_{\lambda\nu\iota} f_{\varrho\mu\varkappa}) \\ &= (g^{\varrho\iota} \delta g^{\nu\varkappa} + g^{\nu\varkappa} \delta g^{\varrho\iota}) f_{\lambda\nu\iota} f_{\varrho\mu\varkappa}. \end{aligned}$$

Nach (4.b)

$$= - (g^{\varrho\iota} g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta} + g^{\nu\varkappa} g^{\varrho\alpha} g^{\iota\beta}) f_{\lambda\nu\iota} f_{\varrho\mu\varkappa} \delta g_{\alpha\beta}.$$

Folglich ergibt sich die Relation

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} &= - g^{\lambda\mu} (g^{\varrho\iota} g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta}) \\ &\quad + g^{\nu\varkappa} g^{\varrho\alpha} g^{\iota\beta}) f_{\lambda\nu\iota} f_{\varrho\mu\varkappa} \delta g_{\alpha\beta} \\ &= - (g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta} f_{\nu\lambda}{}^{\varrho} f_{\varrho\varkappa}{}^{\lambda} \\ &\quad + g^{\varrho\alpha} g^{\iota\beta} f_{\nu\iota}{}^{\mu} f_{\varrho\mu}{}^{\nu}) \delta g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Nach Änderung der Summationsbuchstaben $(\varrho \varepsilon \mu \nu)$ in $(\nu \varkappa \lambda \varrho)$ in dem zweiten Glied der Klammer

$$g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} = - 2 g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta} f_{\nu\lambda}{}^{\varrho} f_{\varrho\varkappa}{}^{\lambda} \delta g_{\alpha\beta}$$

nach (2.9)

$$\begin{aligned} &= - 2 g^{\nu\alpha} g^{\varkappa\beta} K_{\nu\varkappa} \delta g_{\alpha\beta} \\ &= - 2 K^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (4.3), (4.4), (4.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{4} \delta \int K \sqrt{-g}\, d\tau \\ &= - \tfrac{1}{4} \int (3 K^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} K) \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta} d\tau; \end{aligned} \tag{4.6}$$

wir betrachten dann das dritte Glied von (4.2)

$$\delta \int F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau.$$

Das obige Glied läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} &\delta \int F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau \\ &\quad = \int \delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g})\, d\tau \\ &\quad = \int \delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d\tau \\ &\quad + \int g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \delta \sqrt{-g}\, d\tau \\ &\quad + \int g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} \delta (F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g}\, d\tau. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die rechte Seite der obigen Gleichung berechnen wir gliedweise.

Das erste Glied wird wie folgt berechnet: $\delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} = (g_{\lambda\alpha} \delta g_{\mu\beta} + g_{\mu\beta} \delta g_{\lambda\alpha}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta}$. Nach Vertauschung der Summationsbuchstaben $(\lambda\alpha)$ und $(\mu\beta)$ im zweiten Glied in der Klammer

$$\begin{aligned} \delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} &= 2 g_{\lambda\alpha} F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\beta} \\ &= 2 g_{\lambda\varrho} F^{\lambda\alpha} F^{\varrho\beta} \delta g_{\alpha\beta} = 2 F_{\varrho}{}^{\alpha} F^{\varrho\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

wobei die Summationszeiger (α, μ) in (ϱ, α) geändert werden. Folglich haben wir

$$\begin{aligned} &\int \delta (g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta}) F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d\tau \\ &\quad = 2 \int F_{\varrho}{}^{\alpha} F^{\varrho\beta} \sqrt{-g}\, \delta g_{\alpha\beta} d\tau. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Das zweite Glied läßt sich nach einfacher Rechnung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} &\int g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} F^{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} \delta \sqrt{-g}\, d\tau \\ &\quad = \frac{1}{2} \int g^{\alpha\beta} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, d\tau. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Endlich wollen wir das dritte Glied berechnen. Nach der Definition von $F^{\alpha\beta}$ haben wir

$$\begin{aligned} \delta F^{\alpha\beta} &= - \delta \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\hat{c} \sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu}}{\hat{c} x^{\nu}} \right) \\ &= - \frac{\delta \sqrt{-g}}{g} \frac{\hat{c} \sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu}}{\hat{c} x^{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\hat{c}\, \delta (\sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu})}{\hat{c} x^{\nu}} \\ &= \frac{\delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\hat{c} \sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu}}{\hat{c} x_{\nu}} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\hat{c}\, \delta (\sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu})}{\hat{c} x_{\nu}} = - \frac{\delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} F^{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\hat{c}\, \delta (\sqrt{-g} f^{\alpha\beta\nu})}{\hat{c} x_{\nu}}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

1) $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$.

2) Eddintgon, Mathematical theory of Relativity S. 74, 1923.

Wegen der Symmetrie von $g_{\lambda\alpha}$ erhalten wir

$$g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\delta(F^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}) = 2g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}F^{\lambda\mu}\delta F^{\alpha\beta} = 2F_{\alpha\beta}\delta F^{\alpha\beta} \quad (4.11)$$

Aus (4.10) und (4.11) erhalten wir

$$\int g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\delta(F^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu})\sqrt{-g}\,d\tau = \quad (4.12)$$
$$-2\int\left\{F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\delta\sqrt{-g} + F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right)\right\}d\tau.$$

Durch partielle Integration und nach (4a)

$$\int g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\delta(F^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu})\sqrt{-g}\,d\tau =$$
$$-\int g^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$+2\int\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right)d\tau,$$

weil

$$\int\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right)d\tau = 0$$

ist.

Nun wollen wir das zweite Glied der Gleichung (4.12) weiter reduzieren. Da

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right) = \frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right)$$
$$= \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right)$$

ist, so haben wir

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}\right)\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right) \quad (4.13)$$

nach Definition von $F_{\alpha\beta\nu}$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right) = \frac{1}{3}F_{\alpha\beta\nu}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right),$$

folglich

$$2\int\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right)d\tau$$
$$= \frac{2}{3}\int F_{\alpha\beta\nu}\delta\left(\sqrt{-g}f^{\alpha\beta\nu}\right)d\tau \quad (4.14)$$
$$= \frac{2}{3}\int F_{\alpha\beta\nu}\left(f^{\alpha\beta\nu}\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\,\delta f^{\alpha\beta\nu}\right)d\tau$$
$$= \frac{1}{3}\int F_{\lambda\mu\nu}f^{\lambda\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$+\frac{2}{3}\int F_{\alpha\beta\nu}\delta f^{\alpha\beta\nu}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Das zweite Glied obiger Gleichung kann man wie folgt berechnen. Da

$$\delta f^{\alpha\beta\nu} = \delta\left(g^{l\alpha}g^{m\beta}g^{n\nu}f_{lmn}\right)$$
$$= (\delta g^{l\alpha}g^{m\beta}g^{n\nu} + g^{l\alpha}\delta g^{m\beta}g^{n\nu}$$
$$+ g^{l\alpha}g^{m\beta}\delta g^{n\nu})f_{lmn} \quad \text{ist,}$$

so erhält man

$$F_{\alpha\beta\nu}\delta f^{\alpha\beta\nu} = 3F_{\alpha\beta\nu}g^{m\beta}g^{n\nu}f_{lmn}\delta g^{l\alpha}$$
$$= -3F_{\alpha\beta\nu}f_l{}^{\beta\nu}g^{li}g^{\alpha j}\delta g_{ij}. \quad (4.15)$$

Nach Änderung der Summationsbuchstaben

$$F_{\alpha\beta\nu}\delta f^{\alpha\beta\nu} = -3F_{\lambda\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$
$$= -3F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu}\delta g_{\alpha\beta}$$
$$= -\tfrac{3}{2}(F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu} + F^{\alpha}{}_{\mu\nu}f^{\beta\mu\nu})\delta g_{\alpha\beta}.$$

Nach (4.12), (1.14) und (4.15) ergibt sich

$$\int g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\delta(F^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu})\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$= -\int g^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau \quad (4.16)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int F_{\lambda\mu\nu}f^{\lambda\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$-\int(F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu} + F^{\alpha}{}_{\mu\nu}f^{\beta\mu\nu})\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Aus den Gleichungen (4.7), (4.8), (4.9) und (4.16) bekommen wir endlich

$$\delta\int\tfrac{1}{2}\alpha^2F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = \int\alpha^2\{F_\varrho{}^\alpha F^{\varrho\beta}$$
$$-\tfrac{1}{4}g^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{6}g^{\alpha\beta}F_{\lambda\mu\nu}f^{\lambda\mu\nu}$$
$$-\tfrac{1}{2}(F^{\alpha}{}_{\mu\nu}f^{\beta\mu\nu} + F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu})\}\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau. \quad (4.17)$$

Da aber nach einer bekannten Formel das zweite Glied von (4.2)

$$\delta\int g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau$$
$$= -\int(R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)\,\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau$$ [1])

ist, so folgt aus den Gleichungen (4.2) und (4.6) die folgende:

$$\int\{-(R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)$$
$$-\alpha^2(M^{\alpha\beta} + E^{\alpha\beta})\}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau = 0 \quad (4.18)$$

wobei

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\alpha^2}(3K^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}K) - \tfrac{1}{8}g^{\alpha\beta}F_{\lambda\mu\nu}f^{\lambda\mu\nu}$$
$$+\tfrac{1}{2}(F^{\alpha}{}_{\mu\nu}f^{\beta\mu\nu} + F^{\beta}{}_{\mu\nu}f^{\alpha\mu\nu}) \quad (4.19)$$

und

$$E^{\alpha\beta} = -F_\varrho{}^\alpha F^{\varrho\beta} + \tfrac{1}{4}g^{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} \quad (4.20)$$

gesetzt wird.

Nach (4.18) bekommen wir endlich die folgende Relation, welche das Gravitationsgesetz darstellt[2])

$$R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = -\alpha^2T^{\alpha\beta},$$

wobei

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + E^{\alpha\beta}$$

gesetzt wird.

Der Tensor $T^{\alpha\beta}$ wird als der Materie-Energie-Tensor bezeichnet.

Nun wollen wir durch Divergenzbildung von T^{β}_{α} das Gesetz der mechanischen Wirkung des elektromagnetischen Feldes ableiten.

Da $R^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2}g^{\beta}_{\alpha}R$ divergenzfrei ist[3]), so muß T^{β}_{α} auch divergenzfrei sein, daher gilt die folgende

1) Eddington, Mathematical theory of Relativity S. 139, 1923.
2) Eddington, Mathematical theory of Relativity S. 119.
3) Eddington, Mathematical theory of Relativity S. 115.

Relation:

$$\nabla_\beta T_\alpha^\beta = \nabla_\beta M_\alpha^\beta + \nabla_\beta E_\alpha^\beta = 0, \quad (4.21)$$

folglich

$$\nabla_\beta M_\alpha^\beta = -\nabla_\beta E_\alpha^\beta. \quad (4.22)$$

Die obige Gleichung stellt die Bewegungsgleichung dar, wenn wir unter M_α^β den mechanischen Energie-Tensor und unter E_α^β den elektromagnetischen Energie-Tensor verstehen[1]).

Nun wollen wir die Gleichung (4.22) weiter reduzieren. Nach (4.20) haben wir

$$\begin{aligned}-\nabla_\beta E_\alpha^\beta &= \nabla_\beta (F_{\varrho\alpha} F^{\varrho\beta} - \tfrac{1}{4} g_\alpha^\beta F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) \\ &= \nabla_\beta F_{\varrho\alpha} \cdot F^{\varrho\beta} + F_{\varrho\alpha} \nabla_\beta F^{\varrho\beta} \\ &\quad - \tfrac{1}{4} g_\alpha^\beta (F^{\lambda\mu} \nabla_\beta F_{\lambda\mu} + \nabla_\beta F^{\lambda\mu} \cdot F_{\lambda\mu}) \\ &= \nabla_\beta F_{\varrho\alpha} \cdot F^{\varrho\beta} + F_{\varrho\alpha} \nabla_\beta F^{\varrho\beta} \\ &\quad - \tfrac{1}{2} g_\alpha^\beta F^{\lambda\mu} \nabla_\beta F_{\lambda\mu}.\end{aligned}$$

Da nach (3.1) $\nabla_\beta F^{\varrho\beta} = 0$ ist, so erhalten wir nach Änderung der Summationsbuchstaben im ersten Gliede

$$\begin{aligned}-\nabla_\beta E_\alpha^\beta &= \tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\mu F_{\lambda\alpha} + \tfrac{1}{2} F^{\mu\lambda} \nabla_\lambda F_{\mu\alpha} \\ &\quad - \tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\alpha F_{\lambda\mu} \\ &= -\tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} (\nabla_\alpha F_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda F_{\mu\alpha} \\ &\quad + \nabla_\mu F_{\alpha\lambda}) \\ &= -\tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} \left(\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_{\alpha\lambda}}{\partial x_\mu} \right)\end{aligned}$$

nach (3.2)

$$= -\tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu\alpha}.$$

Daraus erhalten wir die Gleichung

$$\nabla_\beta M_\alpha^\beta = -\tfrac{1}{2} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu\alpha}, \quad (4.23)$$

welche nichts anderes als die Bewegungsgleichung ist.

5. Das Wirkungsprinzip II.

Im vorigen Abschnitte haben wir die Relationen, welche zwischen symmetrischen Tensoren bestehen, bekommen. Damals haben wir $g_{\lambda\mu}$ als unabhängige Variable angenommen. Was können wir aus (4.2) gewinnen, wenn wir als unabhängige Variable $f_{\lambda\mu}$ annehmen? Dieses Problem wird in diesem Abschnitte behandelt.

Nach (4.1) und (4.2) haben wir

$$\delta \int (g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{4} g^{\lambda\mu} K_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2} \alpha^2 F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) \sqrt{-g}\, d\tau = 0.$$

Da $f_{\lambda\mu}$ nicht in $R_{\lambda\mu}$ und in $\sqrt{-g}$ enthalten ist, so erhalten wir

$$\int \{ \tfrac{1}{4} g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2} \alpha^2 \delta (F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) \} \sqrt{-g}\, d\tau = 0. \quad (5.1)$$

1) Eddington Mathematical theory of Reativity S. 181.

Diese Gleichung wollen wir gliedweise berechnen. Aus (2.9) erhält man

$$\begin{aligned}g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} &= g^{\lambda\mu} \delta (g^{\varrho\varepsilon} g^{\varkappa\nu} f_{\lambda\nu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa}) \quad (5.2) \\ &= g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\varkappa\nu} (\delta f_{\lambda\nu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa} + f_{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\varrho\mu\varkappa}).\end{aligned}$$

Nach Vertauschung der Summationszeiger $(\lambda, \nu, \varepsilon)$ und $(\varrho, \mu, \varkappa)$, haben wir

$$g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\varkappa\nu} f_{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\varrho\mu\varkappa} = g^{\varrho\nu} g^{\lambda\mu} g^{\mu\varepsilon} f_{\varrho\mu\varkappa} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon}.$$

Weiter nach der Vertauschung von (μ, ν) und $(\varkappa, \varepsilon)$

$$g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\varkappa\nu} f_{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\varrho\mu\varkappa} = g^{\varrho\varepsilon} g^{\lambda\mu} g^{\varkappa\nu} f_{\varrho\varkappa\mu} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon}.$$

Wegen Antisymmetrie von $f_{\lambda\mu\nu}$

$$g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\varkappa\nu} f_{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\varrho\mu\varkappa} = g^{\varrho\varepsilon} g^{\lambda\mu} g^{\varkappa\nu} f_{\varrho\varkappa\mu} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon}.$$

Mit obigem Resultate haben wir nach (5.2)

$$g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} = 2 g^{\lambda\mu} g^{\varrho\varepsilon} g^{\varkappa\nu} f_{\varrho\mu\varkappa} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} = 2 f^{\mu\varepsilon\nu} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon}.$$

Wegen Antisymmetrie von $f^{\varepsilon\lambda\nu}$

$$g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} = 2 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon}.$$

Diese Gleichung wollen wir weiter reduzieren. Nach der Definition von $f_{\lambda\nu\varepsilon}$ bekommen wir

$$2 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} = 2 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta \left(\frac{\partial f_{\lambda\nu}}{\partial x_\varepsilon} + \frac{\partial f_{\nu\varepsilon}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f_{\varepsilon\lambda}}{\partial x_\nu} \right) \quad (5.3)$$

wegen vollständiger Antisymmetrie von $f^{\lambda\nu\varepsilon}$

$$2 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta f_{\lambda\nu\varepsilon} = 6 f^{\lambda\nu\varepsilon} \delta \left(\frac{\partial f_{\lambda\nu}}{\partial x_\varepsilon} \right) = 6 f^{\lambda\nu\varepsilon} \frac{\partial \delta f_{\lambda\nu}}{\partial x_\varepsilon}.$$

Aus (5.3) erhält man durch partielle Integration

$$\begin{aligned}&\int g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau \\ &= -6 \int \delta f_{\lambda\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} (\sqrt{-g} f^{\lambda\nu\varepsilon}) d\tau \\ &= -6 \int \delta f_{\lambda\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\varepsilon} (\sqrt{-g} f^{\lambda\nu\varepsilon}) \sqrt{-g}\, d\tau,\end{aligned}$$

weil das Flächenintegral verschwindet[1]).

Nach der Definition von $F^{\lambda\mu}$ haben wir

$$\int g^{\lambda\mu} \delta K_{\lambda\mu} \sqrt{-g}\, d\tau = 6 \int F^{\lambda\nu} \delta f_{\lambda\nu} \sqrt{-g}\, d\tau. \quad (5.4)$$

Nun betrachten wir das zweite Glied der Gleichung (5.1).

Da

$$F^{\lambda\mu} \delta F_{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu} \delta F^{\lambda\mu}{}^{2})$$

ist, so haben wir

$$\sqrt{-g}\, \delta (F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) = 2 F_{\lambda\mu} \delta F_{\lambda\mu} \cdot \sqrt{-g}.$$

Nach der Definition von $F^{\lambda\mu}$

$$\begin{aligned}&\sqrt{-g}\, \delta (F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}) \\ &= -2 F_{\lambda\mu} \delta \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} f^{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu} \right\} \sqrt{-g} \\ &= -2 F_{\lambda\mu} \frac{\partial \sqrt{-g}\, \delta f^{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\nu}.\end{aligned}$$

1) Da angenommen wird, daß $\delta f_{\lambda\nu}$ am Rande verschwinden.

2) $F^{\lambda\mu} \delta F_{\lambda\mu} = F_{\alpha\beta} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} \delta F_{\lambda\mu} = F_{\alpha\beta} \delta (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} F_{\lambda\mu}) = F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta}$.

Aus obiger Relation ergibt sich durch partielle Integration

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = 2\int\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}\,\delta f^{\lambda\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Wegen vollständiger Antisymmetrie von $f^{\lambda\mu\nu}$

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = \frac{2}{3}\int\left(\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}\right)\delta f^{\lambda\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Nach Definition von $F_{\lambda\mu\nu}$ haben wir

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F^{\nu}_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = \frac{2}{3}\int F_{\lambda\mu\nu}\,\delta f^{\lambda\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\tau. \tag{5.5}$$

Weiter ist

$$\delta f^{\lambda\mu\nu} = g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}g^{\gamma\nu}\,\delta f_{\alpha\beta\gamma}, \tag{5.6}$$

folglich nach der Definition von $f_{\alpha\beta\gamma}$

$$\delta f^{\lambda\mu\nu} = g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}g^{\gamma\nu}\,\delta\left(\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial f_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}\right).$$

Nach (5.5) und (5.6) erhalten wir

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = \frac{2}{3}\int F_{\lambda\mu\nu}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}g^{\gamma\nu}\left(\frac{\partial\,\delta f_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial\,\delta f_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\,\delta f_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}\right)\sqrt{-g}\,d\tau. \tag{5.7}$$

Nach gleichzeitiger zyklischer Vertauschung von $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ und $(\lambda\,\mu\,\nu)$ in den letzten zwei Gliedern

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = 2\int F^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\,\delta f_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Weiter durch partielle Integration

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = -2\int\delta f_{\alpha\beta}.\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\gamma}d\tau$$

$$\delta\int F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau = -2\int\delta f_{\alpha\beta}.\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}\sqrt{-g}\,d\tau$$

$$= -2\int\nabla_\gamma F^{\alpha\beta\gamma}.\,\delta f_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau,$$

weil das Flächenintegral verschwindet.

Aus (5.1), (5.4) und (5.7) ergibt sich endlich

$$\int\left(\tfrac{3}{2}F^{\alpha\beta}-\alpha^2\nabla_\gamma F^{\alpha\beta\gamma}\right)\delta f_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,d\tau = 0.$$

Folglich entsteht die Relation

$$F^{\alpha\beta} = \tfrac{2}{3}\alpha^2\nabla_\gamma F^{\alpha\beta\gamma}. \tag{5.8}$$

Die obige Gleichung zeigt, daß sich die elektrische Ladung und der elektrische Strom überall verteilen, wo das elektromagnetische Feld existiert. Diese Gleichung verbindet $F^{\alpha\beta}$ und $F^{\alpha\beta\gamma}$ miteinander und kann daher als eine neue Feldgleichung angesehen werden.

Verbinden wir (3.2) und (5.8) so entsteht die Relation

$$\frac{2}{3}\alpha^2\left(\frac{\partial\nabla_\varepsilon F_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial\nabla_\varepsilon F_{\beta\gamma}{}^{\varepsilon}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\nabla_\varepsilon F_{\gamma\alpha}{}^{\varepsilon}}{\partial x_\beta}\right) = F_{\alpha\beta\gamma},$$

welche weiter auf die folgende Form gebracht werden kann,

$$\tfrac{2}{3}\alpha^2\left(\nabla_\gamma\nabla_\varepsilon F_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon}+\nabla_\alpha\nabla_\varepsilon F_{\beta\gamma}{}^{\varepsilon}+\nabla_\beta\nabla_\varepsilon F_{\gamma\alpha}{}^{\varepsilon}\right) = F_{\alpha\beta\gamma}, \tag{5.9}$$

weil für beliebigen antisymmetrischen Tensor $A_{\alpha\beta}$ die Relation

$$\nabla_\gamma A_{\alpha\beta}+\nabla_\alpha A_{\beta\gamma}+\nabla_\beta A_{\gamma\alpha} = \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial A_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial A_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}$$

gilt.

Das obige Resultat besagt, daß die Verteilung der Elektrizität nicht beliebig sein kann, sondern nach (5.9) eingeschränkt wird. Nach der Definition von $F^{\alpha\beta}$ und aus (5.8) erhalten wir die folgende Relation

$$\nabla_\gamma\left(f^{\alpha\beta\gamma}+\tfrac{2}{3}\alpha^2F^{\alpha\beta\gamma}\right) = 0.$$

Für das Bestehen obiger Gleichung ist es hinreichend, daß

$$f^{\alpha\beta\gamma} = -\tfrac{2}{3}\alpha^2F^{\alpha\beta\gamma} \tag{5.10}$$

ist. Wir beschränken uns im folgenden nur auf diesen Fall. Aus (4.19) und (5.10) bekommen wir das folgende Ergebnis.

$$M^{\alpha\beta} = \alpha^2\left(\tfrac{1}{18}g^{\alpha\beta}F_{\lambda\mu\nu}F^{\lambda\mu\nu}-\tfrac{1}{3}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}F^{\beta\mu\nu}\right). \tag{5.11}$$

Daraus folgt

$$M = g_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{9}\alpha^2F_{\lambda\mu\nu}F^{\lambda\mu\nu}. \tag{5.12}$$

Dies zeigt, daß die Materie ohne Elektrizität nicht gebildet werden kann.

6. Einige Sätze über antisymmetrische Tensoren.

Wir wollen einige Sätze in bezug auf die antisymmetrischen Tensoren aufstellen, um die elektromagnetischen Grundgleichungen auf andere Formen zu bringen.

Satz A: Sind $A_{\lambda\mu\nu}$ und $B^{\lambda\mu\nu}$ vollständig antisymmetrische Tensoren, und denken wir uns solche Komponenten für welche $(\lambda\,\mu\,\nu\,\xi)$ gerade bzw. ungerade ist (ξ ist der übrigbleibende Zeiger von $\lambda\,\mu\,\nu$), so transformieren sich die Größen $A_{\lambda\mu\nu}/\sqrt{-g}$ und $\sqrt{-g}\,B^{\lambda\mu\nu}$ bzw. wie kontra- und kovariante Vektoren, für die Transformationsgruppe, für welche $J > 0$ ist.

Der Beweis ist wie folgt ausführbar. Da nach

dem Transformationsgesetz von $A_{\lambda\mu\nu}$

$$A'_{\lambda\mu\nu} = A_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} = \frac{1}{3!}A_{\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda} & \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} & \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda} \\ \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} & \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} & \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\mu} \\ \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} & \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} & \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} \end{vmatrix}$$

ist, so haben wir

$$a'^{\xi} = I'^{\xi}_{\delta}a^{\delta}, \tag{6.1}$$

wobei

$$\pm a'^{\xi} = A'_{\lambda\mu\nu}, \quad \pm a^{\delta} = A_{\alpha\beta\gamma}$$

obere Zeichen für die Fälle wo $(\lambda\mu\nu\xi)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ = gerade

untere Zeichen für die Fälle, wo $(\lambda\mu\nu\xi)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ = ungerade

I'^{ξ}_{δ} = Unterdeterminante von $\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi}$ in J

$$J = \frac{\partial(x_1x_2x_3x_4)}{\partial(x'_1x'_2x'_3x'_4)}$$

bezeichnet wird. Nun ist $dx_\delta = \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi}dx'_\xi$ und wenn man das Gleichungssystem in bezug auf dx'_ξ aufgelöst, so haben wir

$$dx'_\xi = I'^{\xi}_{\delta}dx_\delta/J, \tag{6.2}$$

andererseits ist aber $dx'_\xi = \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta}dx_\delta$, daraus folgt die Relation

$$I'^{\xi}_{\delta} = J\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta}. \tag{6.3}$$

Da aber $J^2g = g'$[1]) und folglich

$$J\sqrt{-g} = \sqrt{-g'} \quad \text{für} \quad J > 0 \tag{6.4}$$

ist, so bekommen wir aus (6.1), (6.3), (6.4) die Relation

$$\mathfrak{A}'^{\xi} = \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta}\mathfrak{A}^{\delta} \tag{6.5}$$

wobei $\mathfrak{A}^{\xi} = a^{\xi}/\sqrt{-g}$ gesetzt wird.

Damit ist die eine Hälfte des Satzes bewiesen; die andere Hälfte läßt sich wie folgt nachweisen. Da

$$B'^{\lambda\mu\nu} = B^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\gamma} = \frac{1}{3!}B^{\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\alpha} & \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\beta} & \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\gamma} \\ \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} & \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} & \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\gamma} \\ \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} & \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta} & \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\gamma} \end{vmatrix}$$

ist, erhalten wir die folgende Relation

$$b'_\xi = I'^{\delta}_{\xi}b_\delta, \tag{6.6}$$

wobei

$$B'^{\lambda\mu\nu} = \pm b'_\xi, \; B^{\alpha\beta\gamma} = \pm b_\delta,$$

obere Zeichen für die Fälle wo $(\lambda\mu\nu\xi)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ = gerade

untere Zeichen für die Fälle wo $(\lambda\mu\nu\xi)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$ = ungerade

I'^{δ}_{ξ} = Unterdeterminante von $\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta}$ in J'

$$J' = \frac{\partial(x'_1x'_2x'_3x'_4)}{\partial(x_1x_2x_3x_4)}$$

gesetzt wird.

Nun ist $dx'_\xi = \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta}dx_\delta$ und wenn wir die Gleichungen in bezug auf dx_δ auflösen, so bekommen wir

$$dx_\delta = I'^{\delta}_{\xi}dx'_\xi/J',$$

Andererseits ist aber $dx_\delta = \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi}dx_\xi$, so ergibt sich

$$I'^{\delta}_{\xi} = J'\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi}. \tag{6.7}$$

Nach (6.6) entsteht daher die Relation

$$b'_\xi = b_\delta\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi}J'.$$

Da aber $g = J'^2g'$ und folglich

$$\sqrt{-g} = J'\sqrt{-g'} \quad \text{für} \quad J' = \frac{1}{J} > 0 \tag{6.8}$$

ist, so bekommen wir

$$\mathfrak{B}'_\xi = \mathfrak{B}_\delta\frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi}, \tag{6.9}$$

wobei $\mathfrak{B}_\xi = \sqrt{-g}\,b_\xi$ gesetzt wird.

Zusatz: Seien $A_{\lambda\mu\nu}/\sqrt{-g} = \mathfrak{A}^{\xi}$ und $\sqrt{-g}\,A^{\lambda\mu\nu} = \mathfrak{A}_\xi$, so entsteht die Relation

$$\mathfrak{A}^{\xi} = -\overline{\mathfrak{A}}_\xi \;(= g^{\xi\delta}\overline{\mathfrak{A}}_\delta). \tag{6.10}$$

Beweis:

Da

$$A_{\lambda\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu}g_{\gamma\nu}A^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3!}A^{\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} g_{\alpha\lambda} & g_{\alpha\mu} & g_{\alpha\nu} \\ g_{\beta\lambda} & g_{\beta\mu} & g_{\beta\nu} \\ g_{\gamma\lambda} & g_{\gamma\mu} & g_{\gamma\nu} \end{vmatrix}$$

ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{A}^{\xi} = -\frac{\Delta_{\delta\xi}}{g}\overline{\mathfrak{A}}_\delta = -g^{\delta\xi}\overline{\mathfrak{A}}_\delta = -\overline{\mathfrak{A}}^{\xi}$$

wobei $\Delta_{\xi\delta}$ = Unterdeterminante von $g_{\delta\xi}$ in g gesetzt wird.

Satz B. Ist $C_{\lambda\mu}$ ein antisymmetrischer Tensor, so transformieren sich die Größen $\sqrt{-g}\,C^{\lambda\mu}$ und

1) Eddington, Mathematical theory of Relativity S. 109.

$C_{\lambda\mu}\sqrt{-g}$ bzw. wie ko- und kontravariante Tensoren, für die Transformationsgruppe, für welche $J > 0$ ist.

Der Beweis lautet folgendermaßen.

Bezeichnen wir die ergänzende Unterdeterminante von

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_m}{\partial x'_{m'}} & \frac{\partial x_n}{\partial x'_{m'}} \\ \frac{\partial x_m}{\partial x'_{n'}} & \frac{\partial x_n}{\partial x'_{n'}} \end{vmatrix}$$

in J, mit $I^{mn}_{m'n'}$, und die ergänzende von

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'_{m'}}{\partial x_m} & \frac{\partial x'_{n'}}{\partial x_m} \\ \frac{\partial x'_{m'}}{\partial x_n} & \frac{\partial x'_{n'}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

in J', mit $I'^{mn}_{m'n'}$ so haben wir nach einem Satze der Determinantentheorie sowie nach (6.3)

$$J \begin{vmatrix} \frac{\partial x_p}{\partial x'_{p'}} & \frac{\partial x_q}{\partial x'_{p'}} \\ \frac{\partial x_p}{\partial x'_{q'}} & \frac{\partial x_q}{\partial x'_{q'}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I^{m'}_{m} & I^{m'}_{n} \\ I^{n'}_{m} & I^{n'}_{n} \end{vmatrix} = J^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_{m'}}{\partial x_m} & \frac{\partial x'_{n'}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x'_{n'}}{\partial x_m} & \frac{\partial x'_{n'}}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Daher gilt die Relation

$$I^{mn}_{m'n'} = J I'^{pq}_{p'q'}, \tag{6.11}$$

wobei $(m\,n\,p\,q)$, und $(m'\,n'\,p'\,q')$ die geraden Permutationen sind.

Nun haben wir nach (6.11)

$$f'_{\nu\xi} = C'^{\lambda\mu}_{\nu\xi} = C^{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2!} f_{\gamma\delta} I'^{\gamma\delta}_{\lambda\mu}$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{1}{J} f_{\gamma\delta} I^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} = \frac{1}{J} f_{\gamma\delta} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi} \tag{6.12}$$

wobei $\pm f_{\gamma\delta} = C^{\alpha\beta}$ gesetzt wird[1]). Daraus folgt aus (6.4)

$$\mathfrak{F}'_{\nu\xi} = \mathfrak{F}_{\gamma\delta} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\delta}{\partial x'_\xi} \tag{6.13}$$

wobei $\mathfrak{F}_{\nu\xi} = \sqrt{-g} f_{\nu\xi}$ gesetzt wird, w. z. b. w.

In ähnlicher Weise haben wir

$$v'^{\nu\xi} = C'_{\lambda\mu} = C_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} = \frac{1}{2!} v^{\gamma\delta} I'^{\nu\delta}_{\nu\xi}$$

$$= \frac{1}{2!} J v^{\gamma\delta} I'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} = J v^{\gamma\delta} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta},$$

wobei $\pm v^{\gamma\delta} = C_{\alpha\beta}$ gesetzt wird. Daher gilt die Relation mit der Bezeichnung

$$\mathfrak{V}^{\nu\xi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} v^{\nu\xi}$$

$$\mathfrak{V}'^{\nu\delta} = \mathfrak{V}^{\gamma\delta} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\delta}, \tag{6.14}$$

[1]) Obere Zeichen für die Fälle wo $(\alpha\beta\gamma\delta)$ gerade ist, untere Zeichen für die Fälle, wo $(\alpha\beta\gamma\delta)$ ungerade ist, und $(\lambda\mu\nu\xi)$ ist gerade.

Aus obigen Resultaten ergibt sich der folgende Zusatz:

$$\mathfrak{F}_{\nu\xi} = -\mathfrak{V}_{\nu\xi} = (g_{\gamma\nu} g_{\delta\xi} \mathfrak{V}^{\gamma\delta}).$$

Denn da

$$f_{\nu\xi} = C^{\lambda\mu} = g^{\lambda\alpha} g^{\mu\kappa} C_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{g^2} \triangle_{\lambda\alpha} \triangle_{\mu\beta} C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!} \frac{1}{g^2} g \begin{vmatrix} g_{\nu\gamma} g_{\nu\delta} \\ g_{\xi\gamma} g_{\nu\delta} \end{vmatrix} v^{\gamma\delta}$$

ist, so entsteht die Relation

$$\mathfrak{F}_{\nu\xi} = \sqrt{-g} f_{\nu\xi}$$

$$= -\frac{1}{2!} \begin{vmatrix} g_{\gamma\nu} g_{\gamma\delta} \\ g_{\xi\gamma} g_{\xi\delta} \end{vmatrix} v^{\gamma\delta} \sqrt{-g}$$

$$= -g_{\nu\gamma} g_{\xi\delta} \mathfrak{V}^{\gamma\delta} = -\mathfrak{V}_{\nu\xi}. \tag{6.15}$$

7. Andere Form für die Grundgleichungen.

Obgleich die Grundgleichungen (3.1), (3.2), (3.3) und (4.22) von denen der gewöhnlichen Theorie verschieden erscheinen, kann man sie doch mit Hilfe der Sätze des vorigen Abschnittes auf die gewöhnliche Form bringen.

Wir betrachten zuerst die Gleichung (3.2). Nach den Sätzen A und B können wir sie auf die folgende Form bringen.

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, \mathfrak{V}^{\nu\xi}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g}\, \mathfrak{V}^{\lambda\xi}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \sqrt{-g}\, \mathfrak{V}^{\mu\xi}}{\partial x_\mu},$$

$$= \sqrt{-g}\, S^\xi$$

wobei

$$\sqrt{-g}\, \mathfrak{V}^{\nu\xi} = F_{\lambda\mu}, \sqrt{-g}\, S^\xi = F_{\lambda\mu\nu}$$

(λ, μ, ν sind keine Summationsbuchstaben) gesetzt werden. Die obige wird durch den Gebrauch des Summationszeigers ε weiter vereinfacht wie folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, \mathfrak{V}^{\nu\xi}}{\partial x_\varepsilon} = S^\xi \tag{7.1}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, \mathfrak{F}^{\xi\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon} = S^\xi,$$

wo $\mathfrak{F}^{\xi\varepsilon} = \mathfrak{V}^{\varepsilon\xi}$ gesetzt wird.

Zunächst betrachten wir die Gleichung

$$F^{\lambda\mu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} f^{\lambda\mu\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon}.$$

Ist $(\lambda\,\mu\,\nu\,\xi)$ die gerade Permutation, so ist $(\lambda\,\mu\,\xi\,\nu)$ die ungerade, daher wenn $\sqrt{-g} f^{\lambda\mu\nu} = \varphi_\xi$ gesetzt wird, so muß $\sqrt{-g} f^{\lambda\mu\xi} = -\varphi_\nu$ sein. Setzt man ferner $\sqrt{-g} F^{\lambda\mu} = \mathfrak{F}_{\nu\xi}$, so geht die obige Gleichung in die folgende Form über.

$$\mathfrak{F}_{\nu\xi} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\xi} - \frac{\partial \varphi_\xi}{\partial x_\nu}. \tag{7.2a}$$

Daraus folgt die Relation

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{7.2b}$$

Die Gleichung (3.3), welche das Erhaltungsgesetz der Elektrizität darstellt, geht durch einfache Rechnung in die folgende Form über:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,S^{\xi}}{\partial x_{\xi}} = \nabla_{\xi} S^{\xi} = 0 .$$

Nun betrachten wir die Bewegungsgleichung (4.22).

Da $F^{\lambda\mu} = \mathfrak{F}_{\nu\xi}/\sqrt{-g}$ und $F_{\lambda\mu\nu} = \sqrt{-g}\,S^{\xi}$ sind, so haben wir

$$\frac{1}{2} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu\nu} = \mathfrak{F}_{\nu\xi} S^{\xi} ,$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\nabla_{\nu} M^{\xi}_{\nu} = -\mathfrak{F}_{\nu\xi} S^{\xi} \quad \text{od.} \quad \nabla_{\nu} M^{\nu\nu} = -\mathfrak{F}^{\nu}_{\xi} S^{\xi} . \tag{7.3}$$

Der Tensor $f_{\lambda\mu\nu}$ erfüllt nach seiner Definition die folgende Relation:

$$-\frac{\partial f_{123}}{\partial x_4} + \frac{\partial f_{234}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{341}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{412}}{\partial x_3} = 0 ,$$

welche nach einfacher Rechnung in die folgende Form übergeht.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\varphi^{\xi}}{\partial x_{\xi}} = \nabla_{\xi}\varphi^{\xi} = 0 .$$

Wenn die $g_{\lambda\mu}$ die konstanten Werte

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

annehmen, gehen die Gleichungen (7.1), (7.2) und (7.3) in die folgende über

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{F}^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{14}}{\partial x_4} &= S^1 \\ \frac{\partial\mathfrak{F}^{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{24}}{\partial x_4} &= S^2 \\ \frac{\partial\mathfrak{F}^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{34}}{\partial x_4} &= S^3 \\ \frac{\partial\mathfrak{F}^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{43}}{\partial x_3} &= S^4 . \end{aligned} \tag{7.1'}$$

Oder in die dreidimensionale Vektorgleichung

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + i$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \varrho ,$$

wobei

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}_x = \mathfrak{F}^{41} = F_{32}, \ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{F}^{42} = F_{13}, \ \mathfrak{E}_z = \mathfrak{F}^{43} = F_{21} \\ &\mathfrak{H}_x = \mathfrak{F}^{23} = F_{14}, \ \mathfrak{H}_y = \mathfrak{F}^{31} = F_{24}, \ \mathfrak{H}_z = \mathfrak{F}^{12} = F_{34} \\ &i_x = S^1 = F_{432}, \ i_y = S^2 = F_{413}, \\ &\qquad i_z = S^3 = F_{421}, \ \varrho = S^4 = F_{123} \end{aligned}$$

sind.

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{14} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1}, \quad \mathfrak{F}_{24} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2} \\ \mathfrak{F}_{34} &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_3}, \quad \mathfrak{F}_{23} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} \\ \mathfrak{F}_{31} &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}, \quad \mathfrak{F}_{12} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{7.2'a}$$

oder in die dreidimensionale Vektorgleichung

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\psi^{1})$$

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A} ,$$

wobei

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_x = -\varphi_1 = f^{423}, \ \mathfrak{A}_y = -\varphi_2 = f^{431}, \\ &\qquad \mathfrak{A}_z = -\varphi_3 = f^{412}, \ \psi = \varphi_4 = f^{123} \\ &\mathfrak{E}_x = \mathfrak{F}_{14} = F^{23}, \ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{F}_{24} = F^{31}, \ \mathfrak{E}_z = \mathfrak{F}_{34} = F^{12} \\ &\mathfrak{H}_x = \mathfrak{F}_{23} = F^{14}, \ \mathfrak{H}_y = \mathfrak{F}_{31} = F^{24}, \ \mathfrak{H}_z = \mathfrak{F}_{12} = F^{34} \end{aligned}$$

sind.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{F}_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial\mathfrak{F}_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{F}_{31}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial\mathfrak{F}_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial\mathfrak{F}_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathfrak{F}_{42}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial\mathfrak{F}_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{F}_{31}}{\partial x_4} + \frac{\partial\mathfrak{F}_{14}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial\mathfrak{F}_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathfrak{F}_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial\mathfrak{F}_{24}}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned} \tag{7.2'b}$$

oder in die dreidimensionale Vektorgleichung

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial M^{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial M^{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial M^{14}}{\partial x_4} \\ &\qquad = \mathfrak{F}^{12} S^2 + \mathfrak{F}^{13} S^3 - \mathfrak{F}^{14} S^{4\,2}) \\ &\frac{\partial M^{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M^{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial M^{24}}{\partial x_4} \\ &\qquad = \mathfrak{F}^{21} S^1 + \mathfrak{F}^{23} S^3 - \mathfrak{F}^{24} S^4 \\ &\frac{\partial M^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial M^{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial M^{34}}{\partial x_4} \\ &\qquad = \mathfrak{F}^{31} S^1 + \mathfrak{F}^{32} S^2 - \mathfrak{F}^{34} S^4 \\ &\frac{\partial M^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial M^{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial M^{44}}{\partial x_4} \\ &\qquad = \mathfrak{F}^{41} S^1 + \mathfrak{F}^{42} S^2 + \mathfrak{F}^{43} S^3 . \end{aligned} \tag{7.3'}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} P^1 &= \mathfrak{F}^{12} S^2 + \mathfrak{F}^{13} S^3 - \mathfrak{F}^{14} S^4 \\ P^2 &= \mathfrak{F}^{21} S^1 + \mathfrak{F}^{23} S^3 - \mathfrak{F}^{24} S^4 \\ P^3 &= \mathfrak{F}^{31} S^1 + \mathfrak{F}^{32} S^2 - \mathfrak{F}^{34} S^4 \\ P^4 &= \mathfrak{F}^{41} S^1 + \mathfrak{F}^{42} S^2 + \mathfrak{F}^{43} S^3 \end{aligned}$$

wobei: P^{λ} = Vierer Kraft

1) ψ ist ein skalares Potential.
2) $F^{12} = g_{22} F^{12} = -F^{12}$ usw.
$F^{14} = g_{44} F^{14} = F^{14}$ usw.

oder in die dreidimensionale Vektorgleichung

$\mathfrak{K} = \varrho\mathfrak{E} + [i\mathfrak{H}]$ $\mathfrak{K}$ = Kraftdichte

$W = (i\mathfrak{E})$ W = Leistung der Kraftdichte.

Anhang.

Mit Hilfe der Gleichung (1.9) kann man die verallgemeinerte Ableitung eines kovarianten Tensors zweiten Ranges definieren. Da jeder kovariante Tensor zweiten Ranges sich als Summe von Tensoren vom Typus $A_\lambda B_\mu$ darstellen läßt, so wird es genügen, den Ausdruck der Ableitung für einen solchen speziellen Tensor abzuleiten. Nach (1.9) sind die Ausdrücke

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} - *\{\lambda\nu, \sigma\} A_\sigma$$

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - *\{\mu\nu, \sigma\} B_\sigma$$

Tensoren. Durch äußere Multiplikation des ersten mit B_μ, des zweiten mit A_λ erhält man je einen Tensor dritten Ranges, deren Addition den folgenden Tensor dritten Ranges ergibt

$$*\triangle_\nu (A_\lambda B_\mu) = \frac{\partial (A_\lambda B_\mu)}{\partial x_\nu} - *\{\lambda\nu, \sigma\} A_\sigma B_\mu - *\{\mu\nu, \sigma\} A_\lambda B_\sigma .$$

Daraus folgt, daß

$$*\nabla_\nu T_{\lambda\mu} = \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} - *\{\lambda\nu, \sigma\} T_{\sigma\mu} - *\{\mu\nu, \sigma\} T_{\lambda\sigma}$$

ein Tensor ist, welcher als verallgemeinerte kovariante Ableitung von $T_{\lambda\mu}$ bezeichnet wird.

Zum Schluß spreche ich den Herren Professoren Iwao Kobayashi, Tadahiko Kubota und Mituo Yamada für ihre wertvollen Ratschläge meinen herzlichsten Dank aus.

Sendai, Physikalisches Institut der Tohoku Universität.

(Eingegangen 21. Oktober 1927.)

Messung der Lebensdauer metastabiler *Hg*-Atome.

Von T. Asada, R. Ladenburg und W. Tietze.

(Mitteilungen aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem.)

Bei allen bisherigen Messungen der Lebensdauer metastabiler Atome werden die Atome elektrisch angeregt[1]); daher unterliegen diese Messungen mehr oder weniger dem Einwand, daß zugleich Ionen von relativ großer Lebensdauer entstehen und daß die nach einer gewissen „Schonzeit" nachgewiesenen metastabilen Atome wenigstens z. T. aus den Ionen nachgeliefert werden, ohne die Schonzeit überlebt zu haben[2]).

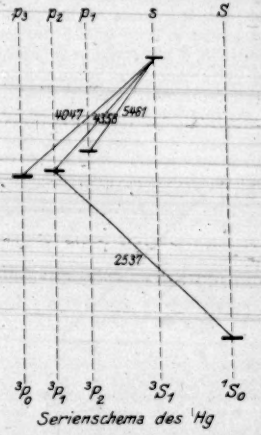


Fig. 1.

Dieser Einwand kommt nur bei sauberer optischer Anregung nicht in Betracht[3]). Diese ist grundsätzlich möglich bei der von Füchtbauer entdeckten stufenweisen Anregung des *Hg;* hier werden bekanntlich die instabilen $^3P_1$-Atome durch die ultraviolette Resonanzlinie 2537 geschaffen, und diese angeregten oder die aus ihnen durch Zusammenstöße gebildeten benachbarten metastabilen $^3P_0$- und $^3P_2$-Atome werden nunmehr z. B. durch die sichtbare Linie 4358 bzw. durch 4047 bzw. durch 5461 zur Fluoreszenz angeregt; und zwar entsteht durch Absorption einer dieser drei Linien der höhere 2^3S_1-Zustand, der spontan unter Emission jeder dieser drei Linien zerfallen kann (s. Serienschema). Bisher schien

1) Vgl. F. M. Kannenstine, Astroph. J. **55**, 343, 1922; **59**, 133, 1924; H. W. Webb, Phys. Rev. **21**, 719, 1923; L. C. Hayner, ebenda **26**, 364, 1925; K. W. Meißner, Ann. d. Phys. **76**, 124, 1925; Physik. Zeitschr. **26**, 687, 1925; K. B. Dorzelo, Physica **5**, 429, 1925; Zeitschr. f. Phys. **34**, 766, 1925; M. W. Zemansky, Phys. Rev. **29**, 513, 1927.

2) Vgl. C. Eckardt, Phys. Rev. **26**, 454, 1925; M. L. Pool, Phys. Rev. **30**, 848, 1927.

3) Bei den neuen Versuchen von Meißner u. W. Graffunder (Ann. d. Phys. **84**, 1009, 1927) ist dieser Einwand wahrscheinlich auch nicht berechtigt, da bei ihnen mit Sicherheit kein „Nachleuchten" eintrat.

allerdings die stufenweise Anregung zu wenig ergiebig, um Lebensdauermessungen auszuführen. Gelegentlich einer Doktorarbeit des einen von uns (W. T.) über den Absorptionskoeffizienten des *Hg* für die Resonanzlinie 2537 zeigte sich jedoch, daß man bei Stickstoffzusatz nach Woods Vorschrift und bei geeigneter Anordnung die Linien der stufenweise erregten Fluoreszenz weit von der erregenden *Hg*-Lampe entfernten Resonanzgefäßes z. T. in $^1/_5$ Sek. photographieren kann und daß eine einwandfreie Lebensdauermessung mit rotierender Scheibe möglich ist. Die Scheibe wird dabei unter 45^0 zum erregenden

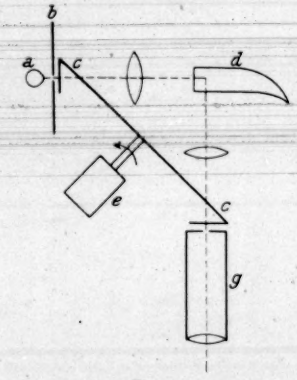


Fig. 2.

Versuchsanordnung.

a *Hg*-Lampe
b Blende
c—*c* rotierende Scheibe
d Fluoreszenzkammer
e Motor
g Kollimator

Strahlenbündel aufgestellt und durchschneidet gleichzeitig das erregende Licht und das senkrecht dazu aus der Fluoreszenzkammer austretende Fluoreszenzlicht (vgl. den Strahlengang in der Figur 2). Durch enge Öffnungen in der Scheibe (vgl. Fig. 3) wird der *Hg*-Dampf der Fluoreszenzkammer *d* zunächst mit dem gesamten Licht einer *Hg*-Lampe beleuchtet und dann nach einer Dunkelzeit von etwa 10^{-4} Sek. durch ein Violettfilter hindurch nur mit den Linien 4047 und 4358 bestrahlt. Hierdurch werden die aus $^3P_1$ durch Zusammenstöße gebildeten metastabilen $^3P_0$-Atome, die die Dunkelzeit überlebt haben, angeregt und das von ihnen ausgesandte Fluoreszenzlicht wird gleichzeitig mit der Einstrahlung der violetten Linie durch ein Grünfilter hindurch photographiert (oder anderweitig gemessen), das nur die Linie 5461 durchläßt. Durch diese Anordnung und einige andere einfache Hilfsmittel gelingt es, jegliches störende falsche Licht vollständig fernzuhalten. Daher ist die relative Intensität der so aufgenommenen Linie 5461 ein Maß der Lebensdauer der metastabilen $^3P_0$-Atome. Die bisherigen Messungen ergaben für diese Lebensdauer bei Zusatz von einigen mm Stickstoff einen Wert von etwa 15.10^{-4} Sek. Es scheint möglich, auf diese Weise die Abhängigkeit der Lebensdauer von äußeren Einflüssen zu untersuchen und die von Foote neulich angestellten diesbezüglichen Überlegungen zu prüfen[1]); vielleicht läßt sich auch die in letzter Zeit verschiedentlich aufgeworfene Frage entscheiden, ob man die Lebensdauer der durch

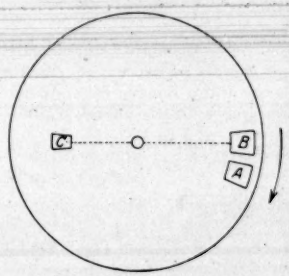


Fig. 3.

Rotierende Scheibe (schematisch).

A Offen
B Fenster mit Blaufilter
C Fenster mit Grünfilter

Wandstöße vernichteten metastabilen Atome durch Zusatz indifferenter Edelgase vergrößern kann, indem infolge der Zusammenstöße mit den Edelgasatomen der Weg der metastabilen Atome zur Wand und dadurch ihr „Leben" verlängert wird. Die Versuche werden auch auf andere metastabilen Atome ausgedehnt.

Dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik sei auch an dieser Stelle für die Gewährung von Mitteln zur Anschaffung eines lichtstarken Spektrographen bestens gedankt.

1) P. D. Foote, Phys. Rev. **30**, 288, 1927.

(Eingegangen 12. Juni 1928.)

BESPRECHUNGEN.

L. Gay, Les mathématiques du chimiste. Gr. 8°. VII und 208 S. Mit 63 Fig. Paris, Librairie scientifique J. Hermann, 1926. M. 3.50 (i. J. 1926).

Wie bei uns, so scheint erst recht in Frankreich die Aufgabe besonders dringlich zu sein, dem Chemie-studierenden ein Lehrbuch der Mathematik für seine Zwecke in die Hand zu geben. Das Mißtrauen, mit dem der Durchschnittschemiker vielfach noch der physikalischen Chemie begegnet, beruht ausschließlich auf ihrer ihm unsympathischen mathematischen Sprache. Das Buch befolgt ungefähr die Linie unseres „Nernst-Schönfließ", d. h. unter Verzicht auf eine für den Nichtmathematiker übertriebene Gründlichkeit der Beweise wird mehr Wert auf begriffliches Verständnis und auf zahlenmäßige Anwendungen gelegt. Das letztere erscheint besonders verdienstvoll, denn gerade in der Übertragung der abstrakten Schulmathematik auf konkrete Begriffe liegen erfahrungsgemäß für den jungen Chemiker die Schwierigkeiten. Alles, was in der Chemie keine Rolle spielt, wird weggelassen; vorausgesetzt werden Kenntnisse über Gleichungssysteme ersten Grades und über die einfache quadratische Gleichung. Der Inhalt ist: Potenzen und Wurzeln. Logarithmen. Funktionen einer Variabeln. Funktionen mehrerer Variabeln. Differentiale. Ableitungen von Funktionen einer Variabeln. Ableitungen von Funktionen mehrerer Variabeln. Integrale von Funktionen einer Variabeln. Integrale von Differentialen, die von mehreren Variabeln abhängen.

Die Darstellungsweise hält die Mitte zwischen dem volkstümlichen Tone von Thomson und nüchterner Wissenschaftlichkeit. Wer das Französische genügend beherrscht, um Nutzen von dem Buch zu haben, sei auf dasselbe aufmerksam gemacht.

G.-M. Schwab.

Alfred Schmid, Die Diffusionsgaselektrode. Gr. 8°. 57 S. Mit 17 Abb. Stuttgart, F. Enke. 1923.

Auf Grund von Studien über Sorptions- und Diffusionsvorgänge von Wasserstoff in Platinelektroden wird eine neue Diffusionsgaselektrode konstruiert, bei der durch metallisches, aber poröses Platin auf einer Kohleunterlage das Gas vom Innern der Elektrode an die Oberfläche diffundiert und sich dort elektromotorisch betätigt. Das Verhalten solcher Elektroden wird nach verschiedenen Methoden beobachtet und in einer Chlor-Wasserstoffkette studiert.

Eine hübsche experimentelle Arbeit — nur schade, daß der Verf. später (s. Besprechung von A. Schmid: „Die kinetische Katalyse" in Physik. Zeitschr. **28**) eine falsche Theorie der Katalyse auf seine Versuche aufbaut. G.-M. Schwab.

A. Eucken und R. Suhrmann, Physikalisch-chemische Praktikumsaufgaben. Gr. 8°. X u. 240 S. Mit 103 Fig. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft m. b. H. 1928. M. 13.—, geb. M. 14.—.

Dieses Buch bringt eine Sammlung von 97 Praktikumsaufgaben aus allen Gebieten der physikalischen Chemie, gegliedert in I. Grundlegende physikalische Meßmethoden, II. Physikalisch-chemische Analyse und III. Bestimmung physikalisch-chemischer Konstanten. Der jeder Aufgabe vorausgeschickte Abschnitt „Grundlagen" erläutert in Kürze die jeweils benutzten Gesetze und Formeln und schlägt somit eine Brücke vom Lehrbuch zur reinen Arbeitsvorschrift. Die klare Darstellung der Versuchsanordnung und -ausführung wird durch zahlreiche Figuren unterstützt. Neben den älteren allgemein gebräuchlichen Praktikumsaufgaben enthält das Werk eine Fülle moderner Meßmethoden: Interferometrische, spektrographische und potentiometrische Messungen, Bestimmungen von Konstanten der Atomphysik (el. Elementarquantum u. e/m).

Das Buch wird sowohl in der Hand des Hochschullehrers, der aus der Menge des Stoffes eine weise Auswahl zu treffen hat, als auch in der des Studierenden ein wertvolles Hilfsmittel für den physikalisch-chemischen Unterricht sein.

Druck und Figuren sind vom Verlag mit besonderer Sorgfalt ausgeführt.

Dr. E. Schwamberger.

P. Pascal, Synthèses et Catalyses Industrielles. Fabrications Minérales. 8°. 449 S. Paris, J. Hermann. 1925.

Der Inhalt dieses Buches ist wesentlich spezieller als sein Titel erwarten läßt. Es werden behandelt: Das Stickstoffproblem, die Schwefelsäureindustrie und die Industrie des Chlors und der Salzsäure.

Wie der Verfasser im Vorwort erwähnt, stellt das Buch den fast unveränderten Abdruck von Vorlesungen dar, die er in den Jahren 1919 und 1922 an der Universität Lille gehalten hat. Dies mag die Tatsache erklären, daß der Inhalt noch teilweise unter dem Einfluß der Kriegsstimmung steht, was besonders deutlich bei der Besprechung des Stickstoffproblems zum Ausdruck kommt.

Von solchen Stellen, die hoffentlich in einer neuen Auflage nicht mehr zu finden sein werden, abgesehen, handelt es sich um eine ausführliche, sachgemäße und moderne Besprechung der heute im Vordergrunde des Interesses stehenden Prozesse zur Darstellung der genannten Stoffe. H. v. Halban.

W. Tafel, Wärme und Wärmewirtschaft der Kraft- und Feuerungs-Anlagen in der Industrie mit besonderer Berücksichtigung der Eisen-, Papier- und chemischen Industrie. 8°. XII u. 363 S. Mit 123 Abb. u. 2 Zahlentafeln. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1924. Geh. M. 9.50, geb. M. 11.—.

In dem vorliegenden Buch macht der Verfasser den Versuch, die Wärmewirtschaft der Kraft- und Feuerungsanlagen für Leser darzustellen, die mit technischen Anlagen zu tun haben, ohne selbst Maschineningenieure zu sein, also vor allem für in der Industrie beschäftigte Chemiker, Physiker usw.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß für eine solche Darstellung ein starkes und immer noch wachsendes Bedürfnis besteht. Denn Chemiker, Physiker und besonders auch Hüttenleute kommen häufig in die Lage, sich ein Urteil über Kraft- und

Wärmeanlagen bilden, und z. B. zwischen verschiedenen Vorschlägen entscheiden zu müssen. Daß hier Kraft- und Feuerungsanlagen gemeinsam behandelt werden, ist neu und bietet deutliche Vorteile.

Der Inhalt des Buches zerfällt in je einen Abschnitt über Kraftanlagen, Feuerungsanlagen und Anwendungen auf einige Sonderindustrien. In diesem letzten Abschnitt werden die eigentliche Hüttenindustrie und die chemische Industrie, mit besonderer Berücksichtigung der Papierindustrie, ausführlich, andere Industriezweige kürzer behandelt. Ein Anhang bringt wertvolle Zahlentafeln.

Der Verfasser hat es verstanden, durch Weglassung unnötiger Einzelheiten und scharfes Herausarbeiten der wichtigsten Gesichtspunkte ein sehr klares und übersichtliches Bild der behandelten Fragen zu geben.

Das Buch kann allen, die sich mit Wärmewirtschaftsfragen beschäftigen müssen, entschieden empfohlen werden. H. v. Halban.

L. de Broglie, Untersuchungen zur Quantentheorie. Übersetzt von Dr. W. Becker. Gr. 8°. 88 S. Mit 6 Fig. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1927. M. 5.80.

Der deutsche Leser wird es mit Freude begrüßen, die berühmt gewordenen, aber nicht immer leicht zugänglichen de Broglieschen Untersuchungen nun in flüssiger deutscher Übersetzung vorzufinden. Als Einführung in die moderne Quantentheorie, insbesondere in die Gedankenwelt Schrödingers, dürfte kaum etwas Geeigneteres zu empfehlen sein, als das Lesen der de Broglieschen Originalarbeiten. Die Ausführungen sind durchweg von mustergültiger Klarheit und Verständlichkeit. Hervorzuheben ist die besonders schön gelungene Darstellung der Quantenbedingungen in der von Einstein gegebenen invarianten Formulierung, ihre Spezialisierung für den Fall quasiperiodischer Bahnen und ihre frappierend einfache Interpretation als Resonanzbedingung der Phasenwelle. Lanczos.

N. R. Campbell, Théorie quantiques des spectres. La relativité. Übersetzt von A. Corvisy. 237 S. Paris, J. Hermann. 1924. 18 Fr.

Das Buch stellt einen Ergänzungsband dar zu dem Werk des Verf. über die moderne Elektrizitätslehre. Der erste Teil bringt die Bohrsche Theorie der Spektren in klarer übersichtlicher Darstellung. Trotzdem auf leichte Verständlichkeit Wert gelegt ist, schreckt der Verf. vor schwierigeren mathematischen Entwicklungen wie der Theorie der bedingtperiodischen Systeme und ihrer Anwendung auf den Stark-Effekt nicht zurück. Allerdings ist vielfach nur der Gang der Rechnung angegeben. Dem Erscheinungsjahr entsprechend fehlen naturgemäß die großen Fortschritte der Atomtheorie, die in den letzten Jahren erzielt wurden, doch behält das Buch als klare Einführung in die Bohrsche Theorie seinen Wert.

Im zweiten Teil wird eine schöne Darstellung der Grundlehren der Relativitätstheorie gegeben. Es wird weniger Wert auf die Vollständigkeit der mathematischen Entwicklung als auf die Überzeugungskraft der Gedankengänge gelegt, doch findet sich z. B. noch die Tensordarstellung der allgemeinen R.T. Die in vielen Punkten originellen Ausführungen sind fesselnd geschrieben. Joos.

J. Plassmann, Himmelsalmanach für das Schaltjahr 1928. 8°. 66 S. Mit einer Zeichnung der Mondform Helicon von Ph. Fauth, einer Sonnenfinsterniskarte sowie Tafeln für die Monde der Planeten. Berlin u. Bonn, Ferd. Dümmler 1928. Kart. M. 3.50.

Das kleine Jahrbuch ist für Liebhaberastronomen und Schulen bestimmt und dürfte sich in seiner geschickten Zusammenstellung als recht brauchbar erweisen. A. Kopff.

Tagesereignisse.

Technischer Literatur-Kalender 1929. Unter Befürwortung durch den Deutschen Verband technisch-wissenschaftlicher Vereine soll Anfang 1929 im Verlage R. Oldenbourg, München und Berlin, die 3. Ausgabe des Technischen Literatur-Kalenders erscheinen. Die bereits in der zweiten Ausgabe verzeichneten Autoren erhalten die Fragebogen zur Ergänzung unaufgefordert zugesandt. Fehlende technische Schriftsteller wollen sich im Interesse der Vollständigkeit des Werkes mit der Schriftleitung, Oberbibliothekar Dr. Otto, Berlin W 57, Bülowstr. 74, in Verbindung setzen. Die in die 3. Ausgabe aufgenommenen Schriftsteller erhalten bei Vorausbestellung das Werk mit einem Preisnachlaß von $^1/_4$ des Ladenpreises, also voraussichtlich für etwa 18 Mark.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Franz Skaupy für Physik.

Ernannt: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen Dr. Johann Radon in gleicher Eigenschaft an der Universität Breslau.

Gesuche.

Zur Leitung unserer Abteilung

Quecksilber-Gleichrichter

suchen wir einen Herrn mit entsprechenden Kenntnissen und Erfahrungen.

Ausführl. Bewerbungen mit Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Gehaltsansprüchen, Angabe des frühesten Eintrittstermins zu richten unter Kennwort „Gleichrichter" an das Personalbüro der

Bergmann-Elektricitäts-Werke A.-G., Berlin N 65

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.